

**Premier problème : traitement approximatif d'une cavité médiocre [Mines Ponts 98 PSI]**

Le terme «cavité électromagnétique», hérité de la technologie des hyperfréquences, désigne tout organe très faiblement dissipatif capable de stocker de l'énergie et de la restituer, sous forme d'onde, dans des guides d'ondes. Des champs peuvent donc s'y maintenir, à certaines fréquences caractéristiques, et sans qu'il soit besoin de sources. La cavité la plus simple que l'on puisse imaginer est peut-être constituée d'un parallélépipède rectangle, vide, aux parois métalliques (infiniment conductrices), c'est-à-dire parfaitement réfléchissantes.

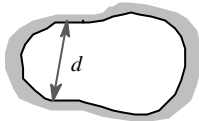


Fig. 1 : une cavité

o 1 – Montrer qu'un rayonnement électromagnétique monochromatique ne peut exister dans une cavité cubique métallique d'arête  $d$  que si  $d$  est au moins aussi grand que la demi-longueur d'onde  $\frac{\lambda}{2}$ . Un argument qualitatif suffira. Comment généraliser cette propriété à une cavité de forme quelconque (fig. 1), dont le plus petit diamètre est  $d$  ?

Toute dépendance temporelle étant de la forme  $\exp(-i\omega t)$ , le champ électrique monochromatique  $\mathbf{E}$ , de pulsation  $\omega$  dans une cavité vide limitée par des parois parfaitement conductrices, est totalement décrit par les trois relations

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1) \quad \text{div}(\mathbf{E}) = 0 \quad (2) \quad \mathbf{E}_{\text{tangentielle}} = \mathbf{0} \text{ sur les parois} \quad (3)$$

o 2 – Préciser le sens physique des relations (2) et (3). Considérons, en tant que modèle, une cavité où le champ  $\mathbf{E}$ , identiquement nul pour  $|x| \geq d$ , ne dépendrait que de l'abscisse  $x$ . Déterminer les fréquences possibles du champ à l'intérieur de cette cavité et retrouver le résultat de la première question.



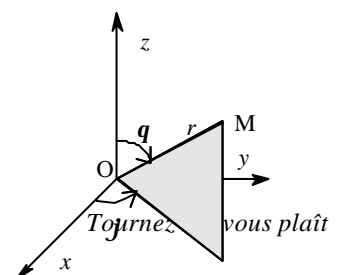
Fig. 2 : une cavité électromagnétique ?

On considère ici (fig. 2) un exemple plutôt insolite de cavité « naturelle », constituée de la Terre d'une part, de l'ionosphère d'autre part (l'ionosphère est un ensemble de couches conductrices, constituées d'atomes ionisés, et s'étendant typiquement de 50 km à 500 km). La conductivité de l'eau de mer est d'environ  $4 \text{ S.m}^{-1}$  ; celle de l'ionosphère est de  $10^3$  à  $10^6$  inférieure à celle de l'eau de mer ; celle du cuivre est d'environ  $10^7$  à  $10^8 \text{ S.m}^{-1}$ . Le modèle physique consiste à affirmer que la surface de la Terre et la limite basse de l'ionosphère sont l'une et l'autre des parois métalliques (au sens de : parfaitement conductrices). La cavité est ainsi constituée de deux coquilles sphériques, de rayons respectifs  $a$  et  $b = a + h = a(1 + \epsilon)$ , avec  $a \approx 6400 \text{ km}$  et  $h \approx 100 \text{ km}$ , séparées par un milieu que l'on assimilera au vide.

o 3 – On s'intéresse d'abord aux modes, notés TE, où le champ radial  $E_r$  est nul. Montrer que les pulsations les plus basses associées à ces modes sont, en ordre de grandeur,  $\omega_{\text{TE}} \approx \frac{pc}{h}$  ; calculer la valeur numérique de  $\omega_{\text{TE}}$ .

On s'intéresse maintenant aux modes TM, où  $B_r$  est identiquement nul (le champ électrique radial  $E_r$  n'est plus nécessairement nul). On suppose que les champs ne dépendent pas de l'azimut  $\phi$ . Les composantes à déterminer sont donc  $E_r(r, \theta)$ ,  $E_\theta(r, \theta)$ ,  $E_\phi(r, \theta)$ ,  $B_r(r, \theta)$  et  $B_\theta(r, \theta)$  ; on donne, en coordonnées sphériques, lorsque  $V_r = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$  :

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{V}) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) \\ \text{rot}(\mathbf{V}) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\phi \sin \theta) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\phi) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \hat{\phi} \\ \Delta f(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta \right) \end{aligned}$$



◦ **4** – Montrer que, si  $\|\mathbf{B}\|$  reste fini, alors  $B_q = 0$  (considérer  $\text{div}(\mathbf{B})$ ). Montrer aussi que l'on peut prendre  $E_j = 0$ . Reste maintenant à déterminer  $E_r(r, \mathbf{q})$ ,  $E_q(r, \mathbf{q})$  et  $B_j(r, \mathbf{q})$ .

◦ **5** – Exprimer  $E_r(r, \mathbf{q})$  et  $E_q(r, \mathbf{q})$  en fonction de  $B_j(r, \mathbf{q})$ .

◦ **6** – Établir que l'équation différentielle satisfaite par le champ  $\mathbf{B}$  en régime harmonique de pulsation  $\omega$  est  $\Delta \mathbf{B} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{B} = \mathbf{0}$  (4). Donner alors l'équation différentielle satisfaite, en coordonnées sphériques, par la composante  $B_j$ .

◦ **7** – On démontre que, dans la solution de l'équation différentielle obtenue à la question 6 les variables sont séparables, de sorte que l'on peut poser  $r B_j = R(r) Y(\mathbf{q})$ . Établir les équations (5) et (6) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{C^{\text{te}}}{r^2} \right) R(r) &= 0 \\ \frac{1}{\sin \mathbf{q}} \frac{d}{d\mathbf{q}} \left( \frac{dY(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} \sin \mathbf{q} \right) + C^{\text{te}} Y(\mathbf{q}) &= 0 \end{aligned} \quad (5 \text{ et } 6)$$

où  $C^{\text{te}}$  est un nombre réel sur lequel on ne sait rien *a priori*.

◦ **8** – Montrer que les conditions aux limites du problème exigent  $\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{C^{\text{te}}}{r^2} > 0$  pour  $a \leq r \leq b = a(1 + \epsilon)$ .

L'inégalité  $\epsilon \ll 1$  suggère de remplacer  $r$  par  $a$  dans l'expression  $\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{C^{\text{te}}}{r^2}$  de l'équation différentielle régissant  $R(r)$ . Démontrer que les pulsations propres de cette cavité sont alors  $\omega_n = c \sqrt{\frac{C^{\text{te}}}{a^2} + \frac{n^2 \mathbf{p}^2}{h^2}} = \frac{c}{a} \sqrt{C^{\text{te}} + \frac{n^2 \mathbf{p}^2}{e^2}}$  (7).

◦ **9** – On démontre, et on admettra, que les solutions acceptables de (6) sont des polynômes, de degré 0, 1, 2 *etc.* par rapport à  $u = \cos \mathbf{q}$ , et de parité alternée (*polynômes de Legendre*). Montrer, en considérant le terme de plus haut degré de l'équation différentielle (6) que cela limite les valeurs possibles de la constante  $C^{\text{te}}$ . Exprimer la pulsation  $\omega_{n,\ell}$  associée au polynôme de degré  $\ell$ .

◦ **10** – Exprimer  $f_{0,\ell} = \frac{\omega_{0,\ell}}{2\mathbf{p}}$  et mettre ce résultat en perspective de la première question ; calculer les cinq premières plus basses fréquences de l'ensemble  $f_{n,\ell}$ . Ces fréquences ont été prédites théoriquement par Schumann en 1952. L'étude par Balsler et Wagner, en 1960, du spectre électromagnétique en très basses fréquences, a montré des pics centrés autour de 8, 14, 20, 26, 32, 37 et 43 Hz. Commenter ces résultats.

◦ **11** – Quelles peuvent être des origines du champ électromagnétique qui se propage autour de la Terre ? connaissez-vous d'autres exemples de guidage entre l'ionosphère et la surface de la Terre ?

## Deuxième problème : conductivité dans un semi-conducteur [CCP 00 MP]

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.

Conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras.

On donne les constantes physiques suivantes .

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| Charge élémentaire                 | $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$   |
| Masse de l'électron                | $m_e = 0,91 \times 10^{-30} \text{ kg}$   |
| Vitesse de la lumière dans le vide | $c = 2,997\,792\,458 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ |
| Perméabilité du vide               | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ SI}$  |
| Permittivité du vide               | $\epsilon_0 = 1 / (\mu_0 c^2)$  |
| Constante de Planck                | $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J.s}$   |

## A. CONDUCTIVITÉ DANS UN SEMI-CONDUCTEUR

On se propose d'étudier les effets d'un champ magnétique uniforme et stationnaire sur les propriétés électromagnétiques d'un matériau semi-conducteur. La première partie (effet de magnétorésistance, effet Hall) est développée dans le cadre des régimes stationnaires. Dans la deuxième partie, on examine, en régime variable, les conditions de propagation d'une onde électromagnétique (onde hélicon).

Le milieu matériel, électriquement neutre, est décrit comme un ensemble d'électrons (charge  $-e$ ) évoluant au sein d'un réseau constitué de charges positives fixes. Les interactions de ces électrons "de conduction" avec le milieu sont entièrement prises en compte en leur affectant une masse effective  $m$  (différente de celle  $m_e$  d'un électron dans le vide) et en introduisant une force de "frottement" d'expression  $-\alpha \mathbf{v}$ , où  $\alpha$  est un coefficient positif, caractéristique du milieu : la vitesse  $\mathbf{v}$  décrit la dérive moyenne de l'ensemble des électrons par rapport au réseau sous l'action d'un champ électromagnétique ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ).

### PREMIERE PARTIE

On considère un échantillon parallélépipédique dont le volume est délimité par les plans  $x = 0, x = L, y = 0, y = \ell, z = -a/2$  et  $z = a/2$  (Figure 1).

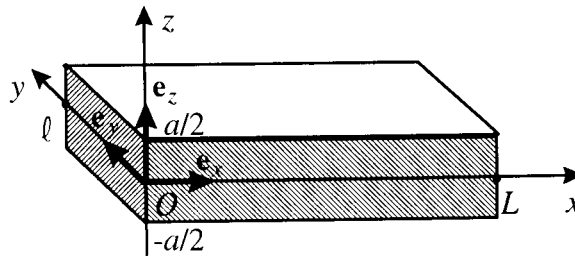


Figure 1

**1. a)** Dans ce matériau, on applique un champ électrique  $\mathbf{E}$  stationnaire. Ecrire l'équation du mouvement d'un électron animé d'une vitesse  $\mathbf{v}$ . A un instant pris comme origine, ce champ est brusquement annulé, Déduire l'évolution ultérieure de la vitesse de l'électron et donner une signification physique au coefficient  $\tau = m / \alpha$ .

**b)** En régime stationnaire, montrer qu'en présence d'un champ électrique  $\mathbf{E}$ , le courant volumique  $\mathbf{J}$  vérifie bien la loi d'Ohm. En déduire la conductivité électronique  $\gamma$  en fonction de  $e, \tau, m$  et de la densité volumique  $n$  des électrons de conduction.

**c)** Dans un matériau semi-conducteur, tel que l'arséniure de gallium GaAs dopé au silicium, la conduction est assurée par des électrons dont la masse effective  $m$  est  $0,06 m_e$ . Sachant qu'à très basse température la valeur de la conductivité vaut  $\gamma = 100 \text{ S. m}^{-1}$ , calculer  $\tau$  pour  $n = 10^{24} \text{ m}^{-3}$ .

**d)** Un courant de densité volumique stationnaire circule parallèlement à l'axe  $Ox$  :  $\mathbf{J} = J \mathbf{e}_x$

L'épaisseur  $a$  étant faible devant les dimensions latérales  $L$  et  $\ell$ , l'échantillon est assimilé à une nappe de courant uniforme d'extension latérale infinie et d'épaisseur  $a$ . A l'aide des symétries d'une telle distribution, préciser

l'orientation du champ magnétique  $\mathbf{b}$  qu'elle crée en tout point de l'espace. Justifier le fait que ce champ est nul dans le plan  $z=0$ . A partir de la forme locale du théorème d' Ampère, calculer  $\mathbf{b}$ . Trouver sa valeur maximale pour  $a=10\ \mu\text{m}$  et  $J=10^6\ \text{A.m}^{-2}$ .

2. a) L'échantillon est désormais plongé dans un champ magnétique extérieur  $\mathbf{B}$ , uniforme et stationnaire, dirigé selon Oz.  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ . Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $\mathbf{v}$  d'un électron du matériau soumis à la force de frottement et à ce champ magnétique.

Montrer que, lorsque  $\tau$  tend vers l' infini, le vecteur  $\mathbf{v}$  est un vecteur tournant dont on précisera le vecteur rotation. Calculer la norme  $\omega_c$  de ce dernier, appelée pulsation cyclotron, pour  $B = 1\ \text{T}$  et  $m = 0,06\ m_e$ .

b) On prend en compte les effets d'un champ électrique  $\mathbf{E}$ , parallèle au plan Oxy, et du champ  $\mathbf{B}$  appliqué précédent. On néglige le champ magnétique créé par le milieu. Les effets d'amortissement sont toujours décrits par la force de frottement  $-\alpha \mathbf{v}$ . Etablir, en régime stationnaire, les relations liant les composantes  $J_x$  et  $J_y$  du courant volumique aux composantes  $E_x$  et  $E_y$  du champ électrique. Montrer qu'elles peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante .

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} \text{ dans laquelle : } \rho_{xx} = \rho_{yy} = 1 / \gamma \text{ et } \rho_{xy} = -\rho_{yx} = B / (ne)$$

c) L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon Oy a «  $L \ll \ell$  (Figure 2.a). On applique une différence de potentiel  $V$  entre les plans  $x = 0$  et  $x = L$  métallisés. Le champ électrique  $\mathbf{E}$  est supposé uniforme :  $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_x$ . Calculer la résistance d' un tel échantillon. Quelle est la modification relative induite par le champ magnétique (effet de magnétorésistance) ? Calculer cette modification pour

$B = 1\ \text{T}$ ,  $\gamma = 100\ \text{S.m}^{-1}$ ,  $n = 10^{24}\ \text{m}^{-3}$  et  $m = 0,06\ m_e$ .

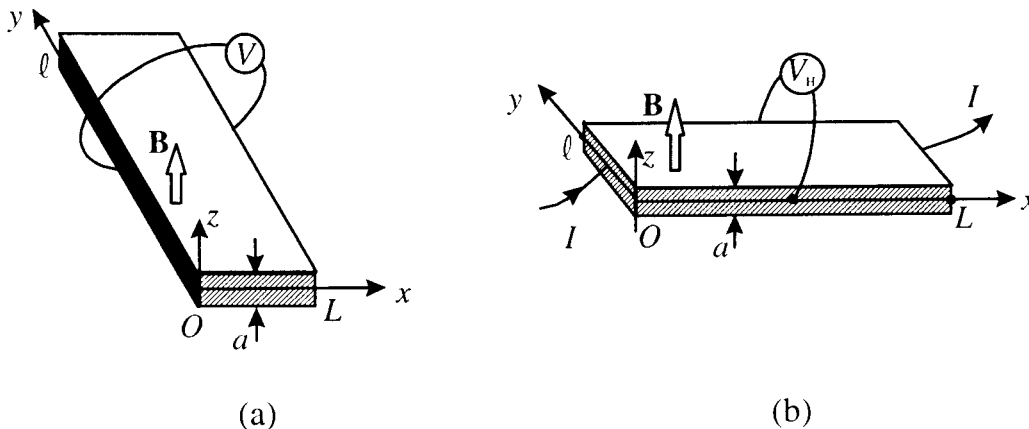


Figure 2

d) L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon Ox :  $a \ll \ell \ll L$  (Figure 2.b). Un courant stationnaire  $I$  circule selon cette direction avec un courant volumique uniforme :  $\mathbf{J} = J \mathbf{e}_x$ . Montrer que le champ électrique possède alors une composante  $E_y$  non nulle.

Donner l'expression de la différence de potentiel  $V_H$  appelée tension de Hall, qui apparaît entre les plans  $y = 0$  et  $y = \ell$ . Calculer  $V_H$  pour  $I = 1\ \text{mA}$ ,  $a = 10\ \mu\text{m}$ ,  $n = 10^{24}\ \text{m}^{-3}$  et  $B = 1\ \text{T}$ . Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?

e) Des mesures effectuées à très basse température (quelques K) sur un échantillon de GaAs d'épaisseur très faible ( $a = 10\ \text{nm}$ ), placé dans un champ magnétique intense ( $B$  de quelques teslas), montrent que la composante  $\rho_{xy}$  varie en fonction de  $B$  par paliers. Cet effet, découvert par Von Klitzing en 1980, porte le nom d'effet Hall quantique : la répartition des électrons en niveaux d'énergie conduit à écrire la densité volumique des électrons sous la forme :  $n = p e B / (ah)$  où  $p$  est un entier non nul et  $h$  la constante de Planck. Montrer que, dans ce cas, la valeur de la résistance transverse, définie selon  $R_t = V_H / I$ , se met sous la forme :  $R_t = R_K / p$ ,  $R_K$  étant une résistance que l'on calculera. Pourquoi la résistance  $R_K$ , appelée constante de Klitzing, est-elle désormais utilisée comme étalon ?

## DEUXIEME PARTIE

On examine les conditions de propagation dans le milieu matériel d'une onde électromagnétique plane monochromatique (pulsation  $\omega$ ), selon l'axe Oz. Le milieu est assimilé à un système de charges dans le vide, électriquement neutre : des électrons évoluent librement dans un réseau d'ions positifs fixes.

**1. a)** Ecrire l'équation différentielle vérifiée par le mouvement d'un électron soumis à un champ magnétique appliqué uniforme et stationnaire  $\mathbf{B}$ , dirigé selon Oz, au champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B}')$  de l'onde et à la force de « frottement »  $-\alpha \mathbf{v}$ . Pourquoi l'effet du champ magnétique  $\mathbf{B}'$  de l'onde est-il négligeable ? Expliciter les équations différentielles vérifiées par les composantes  $J_x$  et  $J_y$  du courant volumique, en introduisant les constantes  $\tau$ ,  $\gamma$  et  $\omega_c$  définies dans la première partie.

**b)** En régime établi, ces composantes évoluent de manière sinusoïdale, avec la pulsation  $\omega$ . On introduit la notation complexe habituelle :  $J_x = \text{Re} \{ \underline{J}_x \}$  avec  $\underline{J}_x = \underline{J}_{Ox} \exp(-i\omega t)$  et  $i^2 = -1$

Dans l'expression de  $J_x$ ,  $\underline{J}_{Ox}$  représente l'amplitude complexe. Une notation similaire est introduite pour  $J_y$ ,  $E_x$  et  $E_y$ . On introduit les quantités complexes :

$$\underline{J}_+ = \underline{J}_{Ox} + i \underline{J}_{Oy} \quad \text{et} \quad \underline{J}_- = \underline{J}_{Ox} - i \underline{J}_{Oy}$$

$$\underline{E}_+ = \underline{E}_{Ox} + i \underline{E}_{Oy} \quad \text{et} \quad \underline{E}_- = \underline{E}_{Ox} - i \underline{E}_{Oy}$$

Montrer que les équations, établies en 1.a, s'écrivent simplement :  $\underline{J}_\pm = \gamma_\pm \underline{E}_\pm$  avec  $\gamma_\pm = A / [1 - i(\omega \pm \omega_c)\tau]$

A étant un coefficient que l'on exprimera en fonction de  $\gamma$ .

**2. a)** Ecrire, en notation complexe, les équations de Maxwell vérifiées par les amplitudes complexes du champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B}')$  d'une onde plane monochromatique se propageant, suivant Oz, dans le milieu. On désigne par  $k$  la norme du vecteur d'onde associé.

En déduire l'équation vérifiée par  $\underline{E}_+$  et  $\underline{E}_-$  en tenant compte de l'expression de  $\underline{J}_+$  et  $\underline{J}_-$ .

**b)** On considère une onde de basse fréquence ( $\omega \ll \omega_c$ ), se propageant dans un milieu de conductivité élevée ( $\omega_c \tau \gg 1$ ).

Montrer que la condition de propagation se met sous la forme :  $k_\pm^2 = \omega^2 / c^2 - K^2$

où  $K$  est un coefficient que l'on exprimera en fonction de  $\omega$ ,  $n$ ,  $B$  et des constantes physiques.

**c)** En déduire qu'au-dessous d'une certaine pulsation critique  $\omega_0$ , seul un type d'onde peut se propager dans le milieu. Quelle est alors la polarisation d'une telle onde, appelée onde hélicon ?