Logique, Induction, Preuve – Session 1 – 22/01/2020

Prénom : Nom :

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Lisez le sujet avant de commencer. Traitez les exercices dans votre ordre de préférence.
Dans tous les exercices, vous veillerez à justifier vos résultats, par exemple en faisant apparaître le nom des règles utilisées, il en sera tenu compte dans la notation.
Les preuves demandées ont toutes été réalisées avec Coq et Why3 pour réduire les risques d'erreurs. Si vous pensez avoir trouvé une erreur, indiquez le sur votre copie, corrigez la et poursuivez votre composition.

Exercice 1 Modéliser en logique des propositions, sous la forme de formules bien formées, les énoncés suivants :

1. « Si je suis en vacances et qu'il ne fait pas beau, alors je vais au cinéma. »

2. « Ne pas sortir de chez soi ou ne parler à personne rend associal. »

3. « Je ne mange que si j'ai faim. »

Exercice 2 Modéliser en logique des prédicats, sous la forme de formules bien formées, les énoncés suivants :

1. « Toute lettre de l'alphabet est soit une consonne soit une voyelle. »

2. « Quelques requins sont féroces mais Jacques ne l'est pas. »

3. « Il existe un Toulousain qui connait tous les Toulousains. »

Exercice 3 Soient A, B et C des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant exclusiement une table de vérité (pas de transformation des formules par =)** que la formule suivante est une tautologie (détailler les étapes de calcul en introduisant les colonnes nécessaires) :

$$((A \to B) \land (A \to \neg B)) \to \neg A$$

A	B	C	
F	F	F	
F	F	V	
F	V	F	
F	V	V	
V	F	F	
V	F	V	
V	V	F	
V	V	V	

Exercice 4 Soient A, B et C des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant les propriétés des opérateurs de logique des propositions** rappelées en annexe A, que la formule suivante est une tautologie :

$$((A \to B) \land (A \to \neg B)) \to \neg A$$

Exercice 5 Soient A et B des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant la déduction naturelle constructive (c'est-à-dire sans les règles du tiers-exclu (TE dans le résumé de cours) et de l'absurde classique (A dans le résumé de cours))**, que la formule suivante est une tautologie :

$$((A \to B) \land (A \to \neg B)) \to \neg A$$

Exercice 6 Soient A et B des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant la déduction naturelle constructive (c'est-à-dire sans les règles du tiers-exclu (TE dans le résumé de cours) et de l'absurde classique (A dans le résumé de cours))**, que la formule suivante est une tautologie :

$$((\neg A) \wedge (A \vee B)) \rightarrow B$$

Exercice 7 Soient A et B des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant la déduction naturelle classique (y compris les règles du tiers-exclu ou de l'absurde classique)**, que la formule suivante est une tautologie :

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$$

Exercice 8 Nous considérons la spécification des listes munie des équations étudiées en cours et travaux dirigés :

(a) $\forall l \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{append}(\texttt{Nil},l) = l$
(b) $\forall t \in A.\forall l, q \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{append}(\texttt{Cons}(t,\ q),l) = \texttt{Cons}(t,\ \texttt{append}(q,l))$
(c) $\forall l \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{append}(l,\texttt{Nil}) = l$
(d) $\forall l_1, l_2, l_3 \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{append}(l_1,\texttt{append}(l_2,l_3)) = \texttt{append}(\texttt{append}(l_1,l_2),l_3)$

Nous complétons cette spécification par la fonction $\texttt{mapf}(l)$ qui applique l'opérateur `f` sur chaque élément de la liste l et renvoie une liste contenant les résultats de l'appel de `f`.
Le comportement de cette fonction peut être modélisé par les équations suivantes :

(e) $\texttt{mapf}(\texttt{Nil}) = \texttt{Nil}$
(f) $\forall t \in A.\forall q \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{mapf}(\texttt{Cons}(t,\ q)) = \texttt{Cons}(\texttt{f}(t),\ \texttt{mapf}(q))$

En utilisant ces équations comme des axiomes et en introduisant si nécessaire des lemmes intermédiaires, montrer que ces opérations vérifient la propriété suivante :

(g) $\forall l_1, l_2 \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{mapf}(\texttt{append}(l_1,l_2)) = \texttt{append}(\texttt{mapf}(l_1),\texttt{mapf}(l_2))$

A Logique des propositions : Vision sémantique

A.1 Tables de vérité

La sémantique de $\top$ (respectivement $\bot$) est représenté par V (respectivement F).

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V

A.2 Relation d'équivalence sémantique des formules bien formées

$\varphi = \psi$ si et seulement si les deux formules bien formées φ et ψ ont la même table de vérité.

	$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \ \wedge \ (B \rightarrow A)$
Idempotence	$A \wedge A = A$ $A \vee A = A$
	$A \wedge \neg A = \bot$ $A \vee \neg A = \top$ $A \wedge \bot = \bot$ $A \wedge \top = A$ $A \vee \bot = A$ $A \vee \top = \top$ $\neg\neg A = A$
Commutativité	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$
Associativité	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
Distributivité	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
De Morgan	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
Simplification	$A \vee (\neg A \wedge B) = A \vee B$ $A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$ $A \vee (A \wedge B) = A$ $A \wedge (A \vee B) = A$

B Logique des propositions : Vision syntaxique

B.1 Déduction naturelle constructive

Hypothèse	$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ \text{Hyp}$	
Opérateur	Introduction	Elimination
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}\ I_{\rightarrow}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\rightarrow}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ I_{\wedge}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\wedge}^{G} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\wedge}^{D}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{G} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{D}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \chi \quad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ E_{\vee}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ I_{\neg}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \perp}\ E_{\neg}$
$\perp$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \perp}\ I_{\perp}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\perp}$

B.2 Déduction naturelle classique

Tiers-exclu	Preuve par l'absurde
$\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\ \text{TE}$	$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}\ \text{Abs}$