Logique, Induction, Preuve – Sessions 1, 3 et 5 – 25/01/2023

Prénom : Nom : Groupe :

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Lisez le sujet avant de commencer. Traitez les exercices dans votre ordre de préférence.
Dans tous les exercices, vous veillerez à justifier vos résultats, par exemple en faisant apparaître le nom des règles utilisées, il en sera tenu compte dans la notation.
Les preuves demandées ont toutes été réalisées avec Coq et Why3 pour réduire les risques d'erreurs. Si vous pensez avoir trouvé une erreur, indiquez le sur votre copie, corrigez la et poursuivez votre composition.

Exercice 1 Modéliser en logique des propositions, sous la forme de formules bien formées, l'énoncé suivant : « Les animaux noctures dorment pendant la journée sauf s'ils sont perturbés. Si je croise un animal dans la journée, alors il est soit diurne, soit noctune perturbé. »

Exercice 2 Modéliser en logique des prédicats, sous la forme de formules bien formées, l'énoncé suivant : « Tous les étudiants inscrits dans le département Sciences du Numérique étudient l'Informatique, mais seulement certains d'entre eux choisirons de travailler dans ce domaine. »

Exercice 3 Soient A, B et C des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant une table de vérité** que la formule suivante est une tautologie (détailler les étapes de calcul en introduisant les colonnes nécessaires) :

$$((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$$

A	B	C	
F	F	F	
F	F	V	
F	V	F	
F	V	V	
V	F	F	
V	F	V	
V	V	F	
V	V	V	

Exercice 4 Soient A, B et C des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant les propriétés des opérateurs de logique des propositions** rappelées en annexe A, que la formule suivante est une tautologie :

$$((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$$

Exercice 5 Soient A et B des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant la déduction naturelle constructive (c'est-à-dire sans les règles du tiers-exclu (TE dans le résumé de cours) et de l'absurde classique (A dans le résumé de cours))**, que la formule suivante est une tautologie :

$$(\neg(A \vee B)) \to ((\neg A) \wedge (\neg B))$$

Exercice 6 Soient A et B des variables propositionnelles, montrer, **en utilisant la déduction naturelle classique (y compris les règles du tiers-exclu ou de l'absurde classique)**, que la formule suivante est une tautologie :

$$(\neg(A \land B)) \to ((\neg A) \lor (\neg B))$$

Exercice 7 Prouver la correction totale du triplet de Hoare suivant pour un programme calculant la multiplication de deux entiers relatifs. Nous vous suggérons d'exploiter $\mathtt{S} = \mathtt{A} \times \mathtt{I}$ comme invariant et $\mathtt{B} - \mathtt{I}$ comme variant. Vous compléterez l'invariant si nécessaire pour construire la preuve. Vous détaillerez ci-dessous la preuve des obligations obtenues.

```
{}
if (B < 0) then
        B := - B;
        A := - A
else
        skip
fi
S := 0;
I := 0;
while (I < B) do
        S := S + A;
        I := I + 1;
od
{S = A × B}
```

Exercice 8 Nous considérons la spécification des listes munie des équations étudiées en cours et travaux dirigés :

(a) $\forall l \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{append}(\texttt{Nil},l) = l$
(b) $\forall t \in A.\forall l, q \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{append}(\texttt{Cons}(t,\ q),l) = \texttt{Cons}(t,\ \texttt{append}(q,l))$
(c) $\forall l \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{append}(l,\texttt{Nil}) = l$
(d) $\forall l_1, l_2, l_3 \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{append}(l_1,\texttt{append}(l_2,l_3)) = \texttt{append}(\texttt{append}(l_1,l_2),l_3)$

Nous complétons cette spécification par la fonction $\texttt{snoc}(l,\ e)$ qui ajoute l'élément e à la fin de la liste l.
Le comportement de cette fonction peut être modélisé par les équations suivantes :

(e) $\forall e \in A.\ \texttt{snoc}(\texttt{Nil},\ e) = \texttt{Cons}(e,\ \texttt{Nil})$
(f) $\forall e \in A.\forall t \in A.\forall q \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{snoc}(\texttt{Cons}(t,\ q),\ e) = \texttt{Cons}(t,\ \texttt{snoc}(q,\ e))$

En utilisant ces équations comme des axiomes et en introduisant si nécessaire des lemmes intermédiaires, montrer que ces opérations vérifient la propriété suivante :

(g) $\forall e \in A.\forall l \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{snoc}(l,\ e) = \texttt{append}(l,\texttt{Cons}(e,\ \texttt{Nil}))$

(h) $\forall e \in A.\forall l_1 \in \texttt{liste}(A).\forall l_2 \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{snoc}(\texttt{append}(l_1,l_2),\ e) = \texttt{append}(l_1,\texttt{snoc}(l_2,\ e))$

A Logique des propositions : Vision sémantique

A.1 Tables de vérité

La sémantique de $\top$ (respectivement $\bot$) est représenté par V (respectivement F).

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V

A.2 Relation d'équivalence sémantique des formules bien formées

$\varphi = \psi$ si et seulement si les deux formules bien formées φ et ψ ont la même table de vérité.

	$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \ \wedge \ (B \rightarrow A)$
Idempotence	$A \wedge A = A$ $A \vee A = A$
	$A \wedge \neg A = \bot$ $A \vee \neg A = \top$ $A \wedge \bot = \bot$ $A \wedge \top = A$ $A \vee \bot = A$ $A \vee \top = \top$ $\neg\neg A = A$
Commutativité	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$
Associativité	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
Distributivité	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
De Morgan	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
Simplification	$A \vee (\neg A \wedge B) = A \vee B$ $A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$ $A \vee (A \wedge B) = A$ $A \wedge (A \vee B) = A$

B Logique des propositions : Vision syntaxique

B.1 Déduction naturelle constructive

Hypothèse	$\dfrac{}{\Gamma,\, \varphi \vdash \varphi}\ Hyp$

Opérateur	Introduction	Elimination
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma,\, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}\ I_{\rightarrow}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\rightarrow}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ I_{\wedge}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\wedge}^{G} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\wedge}^{D}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{G} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{D}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma,\, \varphi \vdash \chi \quad \Gamma,\, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ E_{\vee}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma,\, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ I_{\neg}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ E_{\neg}$
$\bot$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ I_{\bot}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\bot}$

B.2 Déduction naturelle classique

Tiers-exclu	Preuve par l'absurde
$\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\ TE$	$\dfrac{\Gamma,\, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ Abs$

C Logique de Floyd/Hoare

$$\frac{}{\{\psi\}\,\text{skip}\,\{\psi\}}\ \text{skip} \qquad\qquad \frac{}{\{[E/x]\,\psi\}\,x := E\,\{\psi\}}\ \text{assign}$$

$$\frac{\{\varphi\}\,P\,\{\chi\} \quad \{\chi\}\,Q\,\{\psi\}}{\{\varphi\}\,P\,;Q\,\{\psi\}}\ \text{sequence}$$

$$\frac{\{\varphi \wedge C\}\,P\,\{\psi\} \quad \{\varphi \wedge \neg C\}\,Q\,\{\psi\}}{\{\varphi\}\,\text{if}\ C\ \text{then}\ P\ \text{else}\ Q\ \text{fi}\,\{\psi\}}\ \text{conditional}$$

$$\frac{\{\varphi \wedge C\}\,P\,\{\varphi\}}{\{\varphi\}\,\text{while}\ C\ \text{invariant}\ \varphi\ \text{do}\ P\ \text{od}\,\{\varphi \wedge \neg C\}}\ \text{partial loop}$$

$$\frac{\{\varphi \wedge C \wedge E \in \mathbb{N} \wedge V = E\}\,P\,\{\varphi \wedge E \in \mathbb{N} \wedge V > E\}}{\{\varphi \wedge E \in \mathbb{N}\}\,\text{while}\ C\ \text{invariant}\ \varphi\ \text{variant}\ E\ \text{do}\ P\ \text{od}\,\{\varphi \wedge \neg C\}}\ \text{total loop}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow \chi \quad \{\chi\}\,P\,\{\psi\}}{\{\varphi\}\,P\,\{\psi\}}\ \text{weaken} \qquad\qquad \frac{\{\varphi\}\,P\,\{\chi\} \quad \chi \rightarrow \psi}{\{\varphi\}\,P\,\{\psi\}}\ \text{strengthen}$$