Examen session 2 – Math, remise à niveau

1 Introduction

— tout les documents sont autorisés ;

— Le barème est donné à titre indicatif.

▷ **Exercice 1.** (3 points) Démontrer par récurrence que

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

▷ **Exercice 2.** (3 points) Calculez les dérivées des fonctions suivantes

2.1.

$$\begin{array}{rccl} \sigma\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \end{array}$$

2.2.

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On différenciera les cas $x < 0, x > 0$ et $x = 0$

▷ **Exercice 3.** (2 points) Calculer

$$\int_0^3 \frac{\sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)} dx.$$

▷ **Exercice 4.** (6 points) Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff \exists a > 0, \exists b > 0, x' = ax \text{ et } y' = by.$$

4.1. Montrez que cette relation binaire est une relation d'équivalence.

4.2. Déterminez les classes d'équivalence des éléments $A = (1, 0), B = (0, -1)$ et $C = (1, 1)$.

4.3. Déterminez toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

▷ **Exercice 5.** (4 points) Soit E et F 2 ensembles non vides et f une application de E à valeurs dans F.

5.1. Donner un exemple où f n'est pas injective et où il existe 2 sous-ensembles A et B de E tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

5.2. Montrez que pour tout sous-ensemble A et B de E on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

5.3. Montrer que si f est injective alors pour tout sous-ensemble A et B de E on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

▷ **Exercice 6.** (3 points)

6.1. Donner la définition de la continuité d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en un point x_0

6.2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer à l'aide de la définition que la fonction f est continue en $x_0 = 1$.