Examen de Probabilités

1ère année Apprentissage Informatique-Réseaux

Mardi 26 novembre 2013 - Durée 2h

Documents autorisés : notes de cours/TD

1 Probabilités conditionnelles

Les 2 exercices ci-dessous sont indépendants.

1.1 Exercice 1

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine, deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires. Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne quelconque soit soulagée par le médicament qu'elle prend ?
2. Quelle est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

1.2 Exercice 2

Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.
On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. la probabilité qu'il ait les cheveux blonds s'il a les yeux bruns.
2. la probabilité qu'il ait les yeux bruns s'il a les cheveux blonds.
3. la probabilité qu'il n'ait pas les yeux bruns s'il a les cheveux blonds.

2 Variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où σ^2 est une valeur fixée.

1. Calculer la constante k en fonction de σ^2.
2. On pose $Y = X^2$. A l'aide de la formule de changement de variable, déterminer la densité de Y. De quel type de loi s'agit-il ?
3. On pose désormais $Z = X^\alpha$ pour $\alpha > 0$ quelconque.Déterminer la densité de Z.

3 Couple de variables aléatoires discrètes

Soit un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) dont la loi de probabilité est donnée par :

$$P[X = i, Y = j] = \begin{cases} cij & \text{si } (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la constante c.
2. Calculer $P[1 \leq X \leq 2, Y \leq 2]$, $P[X \geq 2]$, et $P[Y < 2]$.

3. Calculer les lois marginales de X et de Y.
4. Calculer $E[X]$ et $E[Y]$, puis $\mathrm{var}(X)$ et $\mathrm{var}(Y)$.
5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Que vaut alors, sans faire de calcul, $\mathrm{cov}(X, Y)$?