Examen de Probabilités

1ère année Apprentissage Sciences du Numérique

Durée : 1h45

Documents autorisés : notes de cours/TD

1 Enseignant joueur

Un enseignant de mathématiques pour s'occuper pendant que les élèves font les exercices aime lancer trois dés non pipés. Après quelques minutes passées à faire des lancers avec ces derniers, il commence à se poser plusieurs questions.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un as (= un 1) dans la combinaison ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre ?
3. Quelle est la probabilité que la somme des points marqués sur les trois faces soit paire ?
4. Les évènements considérés aux questions 2 et 3 sont-ils indépendants ?

2 Variable aléatoire continue

Soit la fonction $F(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = 1 - \frac{1}{1+e^x}.$$

1. Montrer que F est bien une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.
2. Déterminer la densité de probabilité f_X correspondant à F.
3. Soit une variable aléatoire X qui suit la loi F. On pose $U = e^X$. A l'aide de la formule de changement de variable, déterminer la densité de probabilité de U (on donnera en particulier l'ensemble des valeurs prises par U).
4. Déterminer la fonction de répartition de U.

3 Loi exponentielle

On suppose que la durée de fonctionnement X d'un équipement réseau suit une loi exponentielle de **moyenne** 500 (jours). Pour un équipement de ce type, déterminer les probabilités suivantes (on donnera les valeurs numériques) :

1. il fonctionnera au-delà de 600 jours.
2. il fonctionnera au-delà de 700 jours, sachant qu'il vient de "fêter" ses 400 jours. En comparant cette probabilité avec la probabilité pour qu'un équipement fonctionne plus de 300 jours, quelle propriété de la loi exponentielle met-on en évidence ?
3. Déterminer la durée de *demi-vie* de l'équipement, à savoir la valeur de la constante c telle que

$$\mathbb{P}(X > c) = \frac{1}{2}$$

4 Couple de variables aléatoires continues

On considère (x_1, x_2) un vecteur aléatoire continu ayant pour fonction de densité :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} c(x_1 + x_2) & \text{si } (x_1, x_2) \in [0;1]^2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Que vaut c ?
2. Calculer les lois marginales de X_1 et de X_2.
3. Calculer $E[X_1]$, $E[X_2]$
4. Calculer la covariance de X_1 et de X_2.
5. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Expliquez votre réponse.

5 Somme de variables aléatoires

On souhaite étudier la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme. Soit $a > 0$.On considère pour cela des variables aléatoires $(U_i)_{i=1,\dots,N}$, uniformes sur l'intervalle $[-a; a]$, et indépendantes. On pose alors :

$$S = \sum_{i=1}^{N} U_i$$

1. Donner la moyenne et la variance de U_i en fonction de a.
2. Déterminer alors la moyenne et la variance de S en fonction de N et a.
3. Quelle est la loi approchée de S quand N tend vers l'infini ? Justifier la réponse.