

Examen de Probabilités

1ère année Apprentissage Informatique-Réseaux

Mardi 27 novembre 2012 - Durée 2h
Documents autorisés : notes de cours/TD

1 Probabilités conditionnelles

Toto propose à Titi le jeu suivant : tirer r cartes dans un jeu de 52 cartes ($r \leq 52$). Si l'as de pique figure parmi ces r cartes, Titi a gagné.

1. quelle est la probabilité P_1 pour que Titi gagne ?
2. Toto envisage de tricher de la façon suivante : il subtilise k cartes ($k < 52 - r$), avant que Titi ne tire ses r cartes, mais Titi ignore la nature des k cartes ainsi enlevées (notamment, il ne sait évidemment pas si l'as de pique fait partie de ces cartes). Quelle est la nouvelle probabilité P_2 pour que Titi gagne ? Toto est-il si malin ?
Aide : pour calculer P_2 , on conditionnera par rapport à l'évènement "l'as de pique fait partie des k cartes subtilisées".

2 Variable aléatoire discrète

On lance 2 "dés" à quatre faces bien équilibrés. On définit la variable aléatoire X comme la somme des résultats des 2 dés.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de X , c'est-à-dire les probabilités $P[X = k]$ pour toutes les valeurs k possibles.
3. Calculer $P[X < 5]$, $P[X \leq 5]$, et $P[3 \leq X < 5]$.

3 Couple de variables aléatoires

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la densité conjointe est donnée par :

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la constante c (on rappelle qu'il faut $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$).
2. Calculer $P[1 < X < 2, 2 < Y < 3]$.
3. Calculer les lois marginales de X et de Y .
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Que vaut alors, sans faire de calcul, $\text{cov}(X, Y)$?
5. Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.
6. Représenter graphiquement l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tels que } 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1, \text{ et } x + y \leq 3\}$. Calculer alors $P[X + Y < 3]$.
7. On pose $Z = \sqrt{Y}$. Déterminer la densité de Z .