Examen de Probabilités

1ère année Apprentissage Informatique-Réseaux

Jeudi 27 novembre 2014 - Durée 2h

Documents autorisés : notes de cours/TD

1 Probabilités conditionnelles

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'une certaine maladie On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 0.95.
- Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 0.10.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ? (on pensera au théorème des probabilités totales)
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

2 Variable aléatoire discrète

On souhaite changer 3 batteries de téléphones portables. Pour cela, on dispose d'un lot de 15 batteries, mais on sait que 5 d'entre elles sont défectueuses. Par contre, on ne sait pas lesquelles sont défectueuses, et on choisit donc ces 3 batteries de remplacement au hasard.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de batteries défectueuses choisies.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la probabilité qu'au moins une des batteries soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité pour que les 3 batteries soient défectueuses.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait une et une seule batteries défectueuse.

3 Variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $Y = 1/X$. A l'aide de la formule de changement de variable, déterminer la densité de Y.

4 Couple de variables aléatoires continues

On génère une variable aléatoire X selon une loi uniforme sur $[0; 1]$. On génère alors la variable aléatoire Y selon une loi uniforme sur $[0; x]$. La variable "Y sachant X" a donc comme densité $f(y|x)$ la densité d'une loi uniforme sur $[0; x]$.

1. Exprimer $f(y|x)$.
2. En déduire l'expression de la densité conjointe $f(x, y)$. On prendra soin de bien déterminer le domaine de $\mathbb{R}^2$ pour lequel cette expression est valable.

3. Calculer alors la densité marginale $f_Y(y)$ (on fera attention aux bornes d'intégration).
4. Déterminer $E[Y]$ (on fera une intégration par partie).
5. Calculer alors $\mathrm{Cov}(X, Y)$ (aide : on a $E[XY] = \int_0^1 \left(\int_0^x xyf(x, y)dy \right) dx$).
6. les variables X et Y sont-elles indépendantes ?