Examen de Probabilités

1ère année Sciences du Numérique par Apprentissage

mercredi 15 novembre 2017 - Durée 2h

Documents autorisés : notes de cours/TD

1 Installation réseau

Une entreprise chargée du maintien d'une installation réseau doit vérifier l'état de marche de ses appareils et en remplacer certains le cas échéant. D'après ce qu'elle a pu constater sur d'autres installations avec le même type d'appareils, elle considère qu'il existe une probabilité de 10% pour qu'un appareil soit défectueux. Parmi ceux-ci, il existe une probabilité égale à 70% de ne pas pouvoir être réparé (ou réparé à un coût trop important), et donc d'être hors d'usage. Pour un appareil ayant toujours bien fonctionné, cette dernière probabilité est égale à 20%.

1. Calculer la probabilité pour un appareil donné d'être hors d'usage ;
2. Calculer la probabilité pour un appareil hors d'usage d'avoir toujours bien fonctionné jusque là ;
3. Soit X la variable aléatoire définie comme le nombre d'appareils défectueux, parmi 20 appareils choisis au hasard. Quelle est la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance et son écart-type ?
4. Calculer $P[X = 10]$.

2 Fumeur un jour, fumeur toujours ?

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardiovasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer. Toujours selon certaines statistiques, on estime les probabilités suivantes :

- on note α la probabilité pour qu'une personne ne fume pas un jour J_{n+1} si cette personne n'a pas fumé le jour précédent J_n ;
- on note β la probabilité pour qu'une personne ne fume pas un jour J_{n+1} si cette personne ~~n'~~a pas fumé le jour précédent J_n.

On note F_n l'évènement "la personne fume le jour J_n". Les probabilités ci-dessus sont donc respectivement $P[\overline{F_{n+1}}|\overline{F_n}]$ et $P[\overline{F_{n+1}}|F_n]$.

1. Exprimer la probabilité P_{n+1} pour que la personne fume le jour J_{n+1} en fonction de la probabilité P_n pour qu'elle fume le jour J_n. **aide** : on se rappellera du théorème des probabilités totales.
2. Calculer la limite de P_{n+1} en fonction de α et de β.
3. Déterminer une condition entre α et β pour qu'il y ait une probabilité supérieure à 50% pour que ce fumeur finisse par s'arrêter de fumer.

3 Variable aléatoire continue

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire.
2. Soit X une variable aléatoire ayant comme densité de probabilité $f(x)$. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $E[X]$.
4. On pose $Y = 2X + 1$. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis sa densité de probabilité.
5. Reprendre la question précédente avec $Y = X^2$.

4 Couple de variables aléatoires continues

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires telles que :

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda(xy + x^2y^2) & \text{pour } x \in [0,1],\ y \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante λ.
2. Calculer les lois marginales de X et de Y. Ces variables sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E[X]$, $E[Y]$, ainsi que la covariance de X et de Y.