Examen de Probabilités

1ère année Apprentissage Sciences du Numérique

Durée : 1h30

Documents autorisés : notes de cours/TD

1 Roulette (3 pts)

Un joueur joue à la roulette dans un casino et obtient un nombre aléatoire entre 0 et 36 (avec les mêmes probabilités pour tous les nombres).
Il mise 5 euros.

- ◇ s'il obtient un nombre pair (hors 0), il récupère ses 5 euros misés et en gagne 5 autres.
- ◇ s'il obtient un nombre impair, il perd ses 5 euros.
- ◇ s'il obtient le 0, il gagne 170 euros.

On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer la moyenne de X et en déduire si le jeu est favorable au joueur.

2 Couple géométrique (4 pts)

Pour les besoins de l'exercice, on rappelle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 2$.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que

$$P(X = i, Y = j) = \frac{a}{2^{i+j}}, \text{ pour tout } (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

1. Déterminer la constante a.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

3 Installation réseau (6 pts)

Une entreprise chargée du maintien d'une installation réseau doit vérifier l'état de marche de ses appareils et en remplacer certains le cas échéant. D'après ce qu'elle a pu constater sur d'autres installations avec le même type d'appareils, elle considère qu'il existe une probabilité de 10% pour qu'un appareil présente un défaut de fabrication, lui permettant toutefois de fonctionner. Mais parmi ceux-ci, il existe une probabilité égale à 70% de devenir hors d'usage après seulement 2 ans. Pour un appareil n'ayant pas de défaut de fabrication initial, cette dernière probabilité est égale à 20%.

1. Calculer la probabilité pour un appareil quelconque d'être hors d'usage après 2 ans.
2. Calculer la probabilité pour un appareil hors d'usage de n'avoir pas eu de défaut de fabrication initial.
3. Le constructeur se décide à faire un contrôle qualité plus strict des appareils fabriqués, c'est-à-dire qu'il teste tous les appareils en sortie de la chaine de fabrication pour savoir s'ils présentent un défaut ou non. On note X le numéro du 1er appareil testé qui présente un défaut. On considère que le nombre d'appareils testés est suffisamment grand pouvoir modéliser que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer la loi de X, c'est à dire la probabilité $P(X = k)$ pour $k \geq 1$.

(b) Vérifier qu'on a bien $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

(c) Calculer alors la moyenne de X.

On utilisera les formules suivantes, pour un réel $0 \leq x < 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

4 Variable aléatoire continue (3 pts)

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est donnée par

$$f(x) = ce^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la constante c (**aide** : dans l'intégrale on distinguera les cas $x \leq 0$ et $x > 0$).
2. On pose $Y = X^3$. A l'aide de la formule de changement de variable, déterminer la densité de probabilité de Y (on prendra soin au préalable de déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y).

5 Couple de variables aléatoires continues (4 pts)

Une personne s'exerce au tir à l'arc sur une cible circulaire de rayon 1. On suppose qu'elle est suffisamment maladroite pour que le point d'impact de coordonnées (X, Y) (le point $(0, 0)$ étant le centre de la cible) soit uniformément distribué sur la cible. La cible C est l'ensemble des points $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Exprimer la densité de probabilité du couple $f(x, y)$ (qui est l'inverse de l'aire de C).
2. Calculer les lois marginales de X et de Y (attention aux bornes d'intégration !)
3. Ces variables sont-elles indépendantes ?