Examen de Probabilités

1ère année Apprentissage Sciences du Numérique

Durée : 1h45

Documents autorisés : notes de cours/TD

1 Test de dépistage et pobabilités conditionnelles

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'une certaine maladie. On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- Si la personne est malade, alors le test est positif (c'est-à-dire que la personne est déclarée malade) avec une probabilité de 0.95.
- Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 0.10.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ? (on pensera au théorème des probabilités totales)
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

2 Variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On dit que X suit une loi de Cauchy. On pose $Y = 1/X$. A l'aide de la formule de changement de variable, déterminer la densité de Y (on prendra soin de donner son ensemble de définition). Quelle est la loi de Y ?

3 Couple de variables aléatoires continues

On génère une variable aléatoire X selon une loi uniforme sur $[0; 1]$. On génère alors la variable aléatoire Y selon une loi uniforme sur $[0; x]$. La variable "Y sachant X" a donc comme densité $f(y|x)$ la densité d'une loi uniforme sur $[0; x]$.

1. Exprimer $f(y|x)$.
2. En déduire l'expression de la densité conjointe $f(x, y)$. On prendra soin de bien déterminer le domaine de $\mathbb{R}^2$ pour lequel cette expression est valable.
3. Calculer alors la densité marginale $f_Y(y)$ (on fera attention aux bornes d'intégration).
4. Déterminer $E[Y]$ (on fera une intégration par partie).
5. Calculer alors $\text{Cov}(X, Y)$ (aide : on a $E[XY] = \int_0^1 \left(\int_0^x xyf(x, y)dy\right) dx$).
6. les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4 Loi exponentielle

On suppose que la durée de fonctionnement X d'un équipement réseau suit une loi exponentielle de **moyenne** 500 (jours). Pour un équipement de ce type, déterminer les probabilités suivantes (on donnera les valeurs numériques) :

1. il fonctionnera au-delà de 600 jours.
2. il fonctionnera au-delà de 700 jours, sachant qu'il vient de "fêter" ses 400 jours. En comparant cette probabilité avec la probabilité pour qu'un équipement fonctionne plus de 300 jours, quelle propriété de la loi exponentielle met-on en évidence ?
3. Déterminer la durée de *demi-vie* de l'équipement, à savoir la valeur de la constante c telle que
$$\mathbb{P}(X > c) = \frac{1}{2}$$

5 Somme de variables aléatoires

On souhaite étudier la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme. Soit $a > 0$.On considère pour cela des variables aléatoires $(U_i)_{i=1,\dots,N}$, uniformes sur l'intervalle $[-a; a]$, et indépendantes. On pose alors :

$$S = \sum_{i=1}^{N} U_i$$

1. Donner la moyenne et la variance de U_i en fonction de a.
2. Déterminer alors la moyenne et la variance de S en fonction de N et a.
3. Quelle est la loi approchée de S quand N tend vers l'infini ? Justifier la réponse.