Examen de Probabilités

1ère année Apprentissage Sciences du Numérique

Durée : 1h30

Documents autorisés : notes de cours/TD

1 Boules de couleur

Une urne contient 10 boules blanches, 5 boules noires et 5 boules rouges. On tire successivement 3 boules sans remise. Calculer les probabilités d'avoir :

1. la première boule blanche et les deux autres rouges (réponse : 0.029) ;
2. les deux premières boules noires (réponse : 0.053) ;
3. une boule blanche et deux boules rouges (réponse : 0.088) ;
4. au moins une boule blanche (réponse : 0.895) ;
5. trois boules de même couleur (réponse : 0.123).

2 Un traitement efficace ?

Dans un pays et à une période complètement imaginaires, une étrange maladie se répand dans la population. Après un certain temps, un traitement a finalement été mis au point pour combattre les formes graves de la maladie. Mais certaines personnes, pour une raison ou une autre, n'ont pas accès à ce traitement. On estime ainsi que 90% de la population y a accès (on assimilera ce pourcentage à une probabilité).

0,9

Par ailleurs, on constate que 70% des personnes qui développent une forme grave de la maladie n'ont pas reçu le traitement (là aussi on assimilera ce pourcentage à une probabilité).

$P(M|\bar{T}) = 0,70$ $P(G)$ $P(G|\bar{T})$

Déterminer le rapport entre la probabilité de développer une forme grave quand on n'a pas reçu le traitement et la probabilité de développer une forme grave quand on a reçu le traitement (**remarque** : chacune de ces 2 probabilités dépend de la probabilité de développer une forme grave, mais le rapport entre ces 2 probabilités n'en dépend pas, et on n'a donc pas besoin de connaitre cette probabilité).

$P(G|T)$

3 Loi Gamma

Une variable aléatoire continue X suit une loi Gamma de paramètres λ et θ (réels strictement positifs) si sa densité est de la forme :

$$f(x) = \frac{x^{\lambda-1}e^{-x/\theta}}{\Gamma(\lambda)\theta^{\lambda}}, \text{ pour } x \geq 0$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler, définie par $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$. Cette fonction généralise à tout réel la fonction factorielle définie sur les entiers, de sorte qu'elle possède la propriété : $\forall t > 0,\ \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$.

Par ailleurs, la fonction caractéristique d'une loi $\Gamma(\lambda, \theta)$ est donnée par :

$$\forall t, \Phi_X(t) = (1 - i\theta t)^{\lambda},$$

ce qui sera utile pour l'une des questions ci-dessous.

1. On prend $\theta = 1$ pour simplifier. Calculer alors la moyenne et la variance de X.
2. Soit $(X_k)_{k=1}^n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\Gamma(\lambda_k, 1)$. On pose $Y = \sum_{k=1}^n X_k$. Quelle est la loi de Y ?
3. On prend $\lambda_k = 1$ pour tout k. Que peut-on dire de la loi de Y quand n devient (infiniment) grand ?

4 Loi de Poisson

Le nombre de personnes se connectant à un serveur pendant un intervalle de temps Δ peut être modélisé par une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Chacune de ces personnes a la probabilité $p \in]0, 1[$ de se faire déconnecter du serveur pour une raison indépendante de sa volonté (problèmes de réseau, ...). On note Y le nombre de personnes déconnectées pendant l'intervalle de temps Δ.

1. En passant par la loi conditionnelle de Y par rapport à X, déterminer la loi de Y ;
2. En déduire $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

5 Couple de variables aléatoires

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues de loi

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{x+y} & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer c.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.
4. Déterminer la covariance de X et de Y.