Examen de Probabilités

1ère année Apprentissage Sciences du Numérique

Durée : 1h30

Documents autorisés : notes de cours/TD

1 Test de dépistage et probabilités conditionnelles

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'une certaine maladie. On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- Si la personne est malade, alors le test est positif (c'est-à-dire que la personne est déclarée malade) avec une probabilité de 0.95.
- Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 0.010.

1. Quelle est la probabilité pour une personne quelconque que son test soit positif ? (on pensera au théorème des probabilités totales)
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
5. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

2 Variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{pour } x \leq 0 \\ 0 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition F de X. On distinguera les cas $x \leq 0$ et $x > 0$.
3. On pose $Y = X^2$. A l'aide de la formule de changement de variable, déterminer la densité de probabilité de Y (on prendra soin au préalable de déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y). On fera attention au fait que X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^-$ uniquement.

3 Loi de Poisson

Le nombre de personnes se connectant à un serveur pendant un intervalle de temps Δ peut être modélisé par une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Chacune de ces personnes a la probabilité $p \in]0, 1[$ de se faire déconnecter du serveur pour une raison indépendante de sa volonté (problèmes de réseau, ...). On note Y le nombre de personnes déconnectées pendant l'intervalle de temps Δ.

1. Déterminer la loi de Y
2. En déduire $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

4 Couple de variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une variable aléatoire binaire prenant les valeurs $+1$ et -1 avec $P[Y = +1] = P[Y = -1] = 1/2$. On suppose que X et Y sont **indépendantes**, et on pose : $Z = XY$.

1. Exprimer la fonction de répartition de Z en fonction de la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, notée Φ (aide : on pensera au théorème des probabilités totales appliqué à un évènement binaire, et on utilisera la formule $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$). En déduire la loi de Z.
2. Déterminer $\text{Cov}(X, Z)$.
3. Montrer que $P[X + Z = 0] = 1/2$ (on pensera à la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$).
4. Sachant qu'une somme de variables aléatoires continues indépendantes est une variable aléatoire continue, que peut-on déduire du résultat précédant concernant l'indépendance entre X et Z ?