Examen de Probabilités

1ère année Apprentissage Sciences du Numérique

Durée : 1h30

Documents autorisés : notes de cours/TD

1 Variable aléatoire discrète

On souhaiter réutiliser des ordinateurs dans un lot de 15 vieux ordinateurs, dont on sait que 5 sont défectueux (mais on ne sait plus lesquels !). On en choisit 3 au hasard. Calculer la probabilité des événements :

1. au moins un ordinateur ampoule est défectueux ;
2. les 3 ordinateurs sont défectueux ;
3. exactement 1 ordinateur est défectueux.

2 Evènement indépendants ?

Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard.

1. Calculer la probabilité des événements "tirer un roi" et "tirer un pique".
2. Ces événements sont-ils indépendants ?
3. Quelle est la probabilité de "tirer un roi ou un pique" ?

3 Station-service

Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^4 & \text{pour } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer c.
2. Calculer la fonction de répartition F_X de X.
3. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir en une semaine soit inférieure à 10^{-5} ? **Aide** : on cherche donc x tel que la probabilité de consommer plus de x milliers de litre dans la semaine soit inférieure à 10^{-5}.

4 Loi log-normale

Soient m et σ deux réels. On dit que X suit une loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si $Y = \ln(X)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Pour simplifier, on supposera dans la suite que $m = 0$ et $\sigma = 1$.

1. Exprimer X en fonction de Y, et donner l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
3. En déduire la densité de probabilité de X.
4. Calculer $E[X]$.

5 Couple de variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une variable aléatoire binaire prenant les valeurs $+1$ et -1 avec $P[Y = +1] = P[Y = -1] = 1/2$. On suppose que X et Y sont **indépendantes**, et on pose : $Z = XY$.

1. Exprimer la fonction de répartition de Z en fonction de la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, notée Φ (aide : on pensera au théorème des probabilités totales appliqué à un évènement binaire, et on utilisera la formule $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$). En déduire la loi de Z.
2. Déterminer $\mathrm{Cov}(X, Z)$.
3. Montrer que $P[X + Z = 0] = 1/2$ (on pensera à la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$).
4. Sachant qu'une somme de variables aléatoires continues indépendantes est une variable aléatoire continue, que peut-on déduire du résultat précédant concernant l'indépendance entre X et Z ?