Examen – Math, remise à niveau

1 Introduction

— tout les documents sont autorisés ;
— Le barème est donné à titre indicatif.

▷ **Exercice 1.** (3 points) Démontrer par récurrence que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

▷ **Exercice 2.** (4 points) Calculez les dérivées des fonctions suivantes

2.1.

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = sin(x^3 + 2x) \end{array}$$

2.2.

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = e^{sin(3x)} \end{array}$$

▷ **Exercice 3.** (3 points) $\log(x)$ désigne ici le logarithme népérien.

3.1. Calculez la dérivée de la fonction suivante

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x\log(x) - x \end{array}$$

3.2. En déduire la valeur de

$$\int_1^3 \log(x)dx.$$

▷ **Exercice 4.** (4 points) Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

4.1. Montrez que cette relation binaire est une relation d'équivalence.

4.2. Déterminez les classes d'équivalence de cette relation binaire.

▷ **Exercice 5.** (2 points) Soit A et B 2 sous-ensembles d'un ensemble E, on note $\bar{A}$ et $\bar{B}$ les complémentaires des ensembles A et B dans E. Montrer que l'on a

$$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = (A \cup \bar{B}) \cap (B \cup \bar{A})$$

▷ **Exercice 6.** (4 points) On considère la fonction suivante

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = n \text{ si } x \in [n, n+1[, n \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

6.1. f est-elle injective ? surjective ?

6.2. On rappelle qu'une fonction g de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

1. Écrire la négation de cette propriété qui signifie donc que g n'est pas continue en x_0.
2. f est-elle continue en $n \in \mathbb{Z}$?