Examen session 1 – Maths, remise à niveau

Consignes. **Durée** : 1h30 min ; Aucun document autorisé ;

▷ **Exercice 1.** (Questions de cours)

1) Définition. Définir les notions suivantes : **a)** Relation d'ordre sur un ensemble E ;

b) Borne supérieur d'une partie A d'un ensemble E ; **c)** A est un sous-espace vectoriel de E ;

d) Supplémentaire d'un sev A de E ; **e)** Application injective, surjective, bijective.

2) QCM. Soient E et F deux ev de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.

Pour chacune des propositions suivantes choisir (en justifiant) la(es) bonne(s) réponse(s) :

i) Si $Kerf = \{0_E\}$, alors :

a) f est injective ; b) f est surjective ; c) f est nulle ; d) f est bijective ; e) $Imf = F$.

ii) Si f est surjective, alors :

a) $Imf = E$; b) $Kerf = \{0_E\}$; c) $E = F$; d) $Imf = F$; e) f est injective.

iii) Si f est bijective, alors :

a) $E = F$; b) $dim\,E = dim\,F$; c) $dim\,Kerf = dim\,Imf$; d) $Kerf = Imf$; e) $Imf = E$

3) Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 4z = 0\}$

a) Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}^3$.

b) déterminer la dimension et une base de G.

4) Soient $f : E \to F$ linéaire et $A, B \subset E$. Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

▷ **Exercice 2.** (Fonctions) Dans chacun des cas suivants calculer $(f \circ g)'$ et $(g \circ f)'$:

1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $g(x) = e^x$; **2)** $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2\sqrt[3]{x^{-10}}$;

Rappel : $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$ et $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x) = \frac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{g^2(x)}$

▷ **Exercice 3.** (Matrices et Applications linéaires)

Soit $f_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application définie par $f(x, y, z) = (x, my + z, -3y + (m + 4)z)$

1) Montrer que f_m est une application linéaire pour tout $m \in \mathbb{R}$.

2) Écrire la matrice A de f_m et déterminer pour quelles valeurs de m, f_m est bijective.

4) Pour $m = -3$, déterminer la dimension et une base de $Kerf$ et de Imf.

5)Pour $m = 0$, montrer que $SpecA = \{1, 3\}$ et calculer les sous-espaces propres associés à 1 et 3.

6) En déduire que A est diagonalisable, écrire la matrice diagonale et la base correspondante.

7) Écrire la matrice de passage P correspondante puis caluculer P^{-1} et A^{12}.