Examen - 1h45

Exercice 1

On s'intéresse à la matrice suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Montrez que les valeurs propres (λ_1, λ_2) de M sont des complexes conjugués.
2. Calculez deux vecteurs propres (X_1, X_2) associés à (λ_1, λ_2). Ces vecteurs forment-ils une base ?
3. Donnez l'expression développée d'une matrice N telle que $N^{-1}MN$ soit diagonale.
4. Calculez l'inverse N^{-1} de N en résolvant un système de quatre équations à quatre inconnues (vérifiez votre résultat en calculant $N^{-1}N$ ou NN^{-1}).
5. Calculez le produit matriciel $N^{-1}MN$. Ce résultat confirme-t-il le résultat de la question 3 ?

Exercice 2

On s'intéresse aux deux matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Montrez que les matrices A et B ont même déterminant et même trace.
2. Montrez que les matrices A et B ont les mêmes valeurs propres (λ_1, λ_2). En quoi cela est-il cohérent avec le résultat de la question 1 ?
3. Déterminez une base de vecteurs propres (X_1, X_2) de la matrice A et une base de vecteurs propres (Y_1, Y_2) de la matrice B.
4. Donnez l'expression de deux matrices P et Q telles que :
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1}BQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
5. Montrez que les matrices A et B sont semblables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice R telle que $B = R^{-1}AR$. Donnez l'expression de R en fonction de P et de Q.

Exercice 3

On s'intéresse à la matrice suivante :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calculez les deux valeurs propres (λ_1, λ_2) de C. Vérifiez le résultat à l'aide du déterminant et de la trace de C.
2. Calculez deux vecteurs propres (X_1, X_2) de C associés aux valeurs propres (λ_1, λ_2).
3. Donnez l'expression de la matrice S ayant pour colonne $X_1/\|X_1\|$ et $X_2/\|X_2\|$.
4. Montrez que S est orthogonale. Que pouvez-vous en déduire pour S^{-1} ?
5. Calculez le produit matriciel $S^\top CS$. Ce résultat est-il surprenant ?