

**Contrôle évaluation de performances - 2APP**  
 – Mercredi 19 novembre 2020 – Riadh DHAOU  
 (Notes de cours et documents distribués autorisés)  
**Durée : 1h** – Nombre de pages : 1 page

**Exercice 1 : File avec un nombre variable de serveurs [5 points]**

Une agence reçoit des clients selon un processus de poisson de paramètre  $\lambda$ . Chaque client est servi pendant une durée qui suit une loi exponentielle avec un taux de service ( $\mu$ ) équivalent au débit d'arrivée ( $\lambda = \mu$ ). L'agence peut accueillir au maximum 5 clients. Les clients sont servis par un agent payé au taux horaire de 25 Euros. Le chef d'agence, payé le double, peut venir en support selon deux stratégies :

- Stratégie 1 : Si le nombre de clients dans l'agence est supérieur ou égal à 4 (4 ou 5).
- Stratégie 2 : Si le nombre de clients dans l'agence est pair (2 ou 4).

On s'intéresse au nombre de clients dans l'agence.

- Q1. Tracer les chaînes de Markov représentant chacune de ces deux stratégies.  
 Q2. Ces deux processus sont-ils ergodiques ? Justifier.  
 Q3. Calculer les probabilités d'états stationnaires (pour chaque stratégie).  
 Q4. Déterminer les probabilités de rejet des clients, dans chaque cas.  
 Q5. Calculer le nombre moyen de clients dans l'agence, pour chaque stratégie.  
 Q6. Quelle est la meilleure stratégie ? Quelle stratégie coûte le plus à l'agence ?

**Exercice 2 : Système de gestion d'abonnements [5 points]**

Un opérateur gère un nombre limité d'abonnements à ses services et qui peuvent être renouvelés tous les mois (sur la base des demandes qui sont traitées au début de chaque mois). Il offre deux classes d'abonnements : abonnement d'un mois (classe A) et abonnement de deux mois (classe B). L'opérateur gère un nombre limité de jetons (chaque jeton permet aux abonnés d'accéder aux services pendant toute la durée de leur abonnement).

Dans la suite de l'exercice nous allons nous intéresser à l'utilisation d'un jeton.

Les demandes d'utilisation de ces jetons parviennent à l'opérateur au début de chaque mois. Une observation statistique a montré que les probabilités pour recevoir, au premier jour du mois, au moins une demande d'abonnement de type A, ou au moins une demande d'abonnement de type B valent respectivement  $P_A = 0,5$  et  $P_B = 0,6$ . Ces probabilités sont indépendantes.

Certains mois, les demandes sont refusées, le jeton étant utilisé pour un abonnement de type B : dans ce cas le client s'adresse à un concurrent (il n'y a pas de liste d'attente). D'autres mois, le jeton reste libre faute de demandes d'abonnement.

Lorsque l'opérateur reçoit simultanément deux demandes : une de type A et une autre de type B, il donne suite à celle de type B.

L'abonnement du type A procure un bénéfice de 50 Euros, celui du type B 120 Euros, et l'inutilisation du jeton pendant un mois engendre une perte de 25 Euros.

1. On désire représenter par une chaîne de Markov l'évolution de l'activité de l'opérateur d'un mois à un autre. Quels sont les 4 états (pour un jeton donné) ? Quelles sont les évolutions entre états d'un mois à l'autre ? Avec quelles probabilités (probabilités de transition) ? Représenter à l'aide d'un graphe et d'une matrice.
2. En supposant que l'opérateur fonctionne depuis plusieurs mois : trouver la probabilité stationnaire de chacun des états. Justifier la validité de ce calcul
3. En déduire, l'espérance mathématique du gain relatif à un mois de fonctionnement.