Contrôle évaluation de performances - 2APP
– Mercredi 30 octobre 2019 – Riadh DHAOU
(Notes de cours et documents distribués autorisés)
Durée : 1h – Nombre de pages : 1 page

Exercice 1 : File avec un nombre variable de serveurs [5 points]

Une agence reçoit des clients selon un processus de poisson de paramètre λ. Chaque client est servi pendant une durée qui suit une loi exponentielle avec un taux de service (μ) équivalent au débit d'arrivée (λ=μ). L'agence peut accueillir au maximum 5 clients. Les clients sont servis par un agent payé au taux horaire de 25 Euros. Le chef d'agence, payé le double, peut venir en support selon deux stratégies :

- Stratégie 1 : Si le nombre de clients dans l'agence est supérieur ou égal à 4 (4 ou 5).
- Stratégie 2 : Si le nombre de clients dans l'agence est pair (2 ou 4).

On s'intéresse au nombre de clients dans l'agence.

Q1. Tracer les chaines de Markov représentant chacune de ces deux stratégies.
Q2. Ces deux processus sont-ils ergodiques ? Justifier.
Q3. Calculer les probabilités d'états stationnaires (pour chaque stratégie).
Q4. Déterminer les probabilités de rejet des clients, dans chaque cas.
Q5. Calculer le nombre moyen de clients dans l'agence, pour chaque stratégie.
Q6. Quelle est la meilleure stratégie ? Quelle stratégie coute le plus à l'agence ?

Exercice 2 : Système multiserveur [6 points]

On considère un système M/M/m avec deux classes de clients. Les arrivées sont poissoniennes de paramètre λ_1 (pour la classe 1) et λ_2 (pour la classe 2). Les serveurs sont exponentiels de paramètres μ_1 (pour la classe 1) et μ_2 (pour la classe 2).
Les clients de la première classe sont des clients ordinaires, c'est-à-dire, chaque client occupera exactement un des m serveurs. Si les m serveurs sont occupés alors tout client arrivant de type 1 est perdu.
Chaque client de la deuxième classe occupera simultanément m_0 serveurs (pendant donc une période exponentielle de paramètre μ_2). Si un client de la deuxième classe arrive et trouve moins de m_0 serveurs libres, il est perdu.

1. Ce système peut être décrit par la variable aléatoire vectorielle (n_1, n_2) où n_i représente le nombre de clients de type i (i=1, 2). Préciser l'ensemble des valeurs prises par cette variable aléatoire.
2. Dresser la chaîne de Markov associée avec les taux de transition.
3. Ecrire l'équation de balance (équilibre des flux) pour un état général
4. Le processus en question est-il un processus de naissance et de mort ou un processus de Markov ?
5. Vérifier que $P(n_1,n_2) = P(0,0).\frac{1}{n_1!}(\frac{\lambda_1}{\mu_1})^{n_1}.\frac{1}{n_2!}(\frac{\lambda_2}{\mu_2})^{n_2}$ est bien une solution du système.
   Comment déterminer P(0,0) ? (ne pas la calculer)
6. Comment déterminer la proportion de clients perdus pour la classe 1 et pour la classe 2.