INP ENSEEIHT

**Contrôle de performances – 2 IR – Riadh DHAOU**
**– Vendredi 15 novembre 2013 à 8h – Durée 1h45 – Nombre de pages : 2 pages**

## Exercice 1: Lignes téléphoniques

Deux lignes téléphoniques sont mises à la disposition des clients qui passent des commandes. Lorsque les deux lignes sont occupées les appels restent dans la file d'attente et dès qu'une ligne est libérée le premier entre en contact. On suppose que des appels arrivent suivant le processus de Poisson de taux de 30 à l'heure et l'on retient l'hypothèse que la durée de la commande est une variable aléatoire exponentielle de durée moyenne 3 mn.

1. Dessiner le diagramme de transition. Le système est-il ergodique ? Si oui trouver la distribution stationnaire.
2. Trouver le nombre moyen d'appels branchés, le nombre moyen d'appels en attente, la durée moyenne de temps passé par usager et la durée d'attente pour avoir une conversation en régime stationnaire
3. Quelle est la portion de temps où les deux lignes sont occupées ?

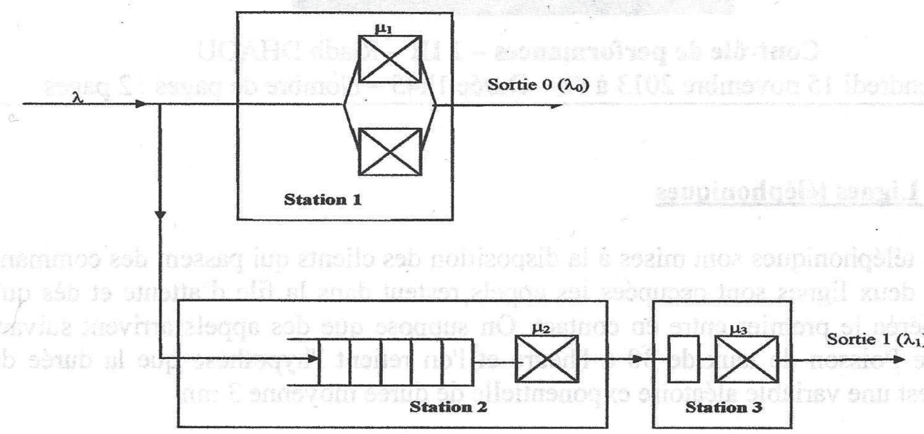
## Exercice 2 : Système multiserveur

On considère un système M/M/m avec deux classes de clients. Les arrivées sont poissoniennes de paramètre $\lambda_1$ (pour la classe 1) et $\lambda_2$ (pour la classe 2). Les serveurs sont exponentiels de paramètres $\mu_1$ (pour la classe 1) et $\mu_2$ (pour la classe 2).
Les clients de la première classe sont des clients ordinaires, c'est-à-dire, chaque client occupera exactement un des m serveurs. Si les m serveurs sont occupés alors tout client arrivant de type 1 est perdu.
Chaque client de la deuxième classe occupera simultanément $m_0$ serveurs (pendant donc une période exponentielle de paramètre $\mu_2$). Si un client de la deuxième classe arrive et trouve moins de $m_0$ serveurs libres, il est perdu.

1. Ce système peut être décrit par la variable aléatoire vectorielle $(n_1, n_2)$ où $n_i$ représente le nombre de clients de type i (i=1, 2). Préciser l'ensemble des valeurs prises par cette variable aléatoire.
2. Dresser la chaîne de Markov associée avec les taux de transition.
3. Ecrire l'équation de balance (équilibre des flux) pour un état général
4. Le processus en question est-il un processus de naissance et de mort ou un processus de Markov ?
5. Vérifier que $P(n_1,n_2) = P(0,0).\frac{1}{n_1!}(\frac{\lambda_1}{\mu_1})^{n_1}.\frac{1}{n_2!}(\frac{\lambda_2}{\mu_2})^{n_2}$ est bien une solution du système.
   Comment déterminer P(0,0) ? (ne pas la calculer)
6. Comment déterminer la proportion de clients perdus pour la classe 1 et pour la classe 2.

## Exercice 3 : Réseau de files d'attente

Soit le réseau de files d'attente suivant :




**Les clients arrivent à la station 1 selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.**
**La station 1 est composée de deux serveurs exponentiels de paramètre $\mu_1$. Les clients qui sont rejetés se dirigent alors vers la station 2 qui est un serveur exponentiel de paramètre $\mu_2$ à la salle d'attente de taille infinie. Les clients qui sortent de la station 2 vont à la station 3 qui est un serveur exponentiel de paramètre $\mu_3$ à la salle d'attente limitée à 1 place.**

1. **Donner la notation de Kendall de chaque station.**
2. **Déterminer le taux d'arrivée dans la station 2.**
3. **Déterminer le temps moyen passé par chaque client pour traverser ce réseau (2 valeurs possibles : $T_0$ et $T_1$, une valeur sur chaque chemin). Les parcours entre stations sont supposés instantanés.**
4. **Déterminer aussi les taux de sortie de ce réseau : $\lambda_0$ et $\lambda_1$.**

## Exercice 4 : Source poissonnienne MMPP

**On considère une source poissonnienne dont le paramètre dépend d'une chaîne de Markov à 2 états $E_1$ et $E_2$. La probabilité de transition de $E_1$ à $E_2$ est donnée par $r_1$ et la probabilité de transiter de $E_2$ vers $E_1$ est égale à $r_2$.**
**Si la chaîne de Markov est à l'état $E_1$, les arrivées sont poissonniennes de paramètre $\lambda_1$. Et si la chaîne de Markov est à l'état $E_2$ la source correspond à un processus poissonien de paramètre $\lambda_2$. Une telle source est connue sous le nom de MMPP (Markov Modulated Poisson Process) à 2 états. On s'intéresse à la file d'attente MMPP/M/1 (ayant un taux de service $\mu$).**

1. **Dresser le diagramme de taux de transitions correspondant à la variable d'état nombre de clients dans le système.**
2. **Déterminer les $\pi_k$ (probabilité d'avoir k clients dans la station)**
3. **Vérifier que $\pi_0$ est bien égal à 1-$\rho$. Quelle est la condition d'ergodicité de ce système ?**
4. **Déterminer le temps moyen d'attente d'un client.**

***Bonne Chance.***