Recherche opérationnelle
Examen - 1h45

L'épreuve comporte deux exercices indépendants. Les notes de cours et de TP sont autorisées. L'examen est noté sur 15 points, qui s'ajoutent aux 5 points de l'examen du premier trimestre.

1 Programmation linéaire (10 points)

La sonde *Rosetta* s'est posée sur la comète *Tchourioumov-Guérassimenko* le 12 novembre 2014, avec à son bord des instruments de mesure et un robot permettant de prélever du sable (en réalité, c'est seulement le module *Philæ* de cette sonde qui s'est posé). Par suite d'une avarie technique, la capacité maximale de la sonde est réduite à 2500 kg et à 15 m^3. Elle ne pourra donc emporter qu'une partie des instruments de mesure et du sable déjà prélevé. On suppose pour simplifier que tous les instruments de mesure font le même poids et le même volume : 100 kg et $1,5$ m^3. Quant au sable, il pèse 250 kg par m^3. On cherche bien sûr à « rentabiliser » la mission au maximum.

1. En comparaison des PL (programmes linéaires) vus en cours, montrez que ce PL est mixte : une variable de décision est discrète, l'autre est continue.
2. Sachant que 20 instruments ont été débarqués et que 12 m^3 de sable ont été prélevés, montrez que la totalité des instruments et du sable ne peut être emportée, que ce soit à cause du poids total ou du volume total.
3. L'Agence Spatiale Européenne doit faire face à un choix difficile : chaque instrument de mesure coûte 1 million d'euros, mais le sable de la comète *Tchourioumov-Guérassimenko* n'a pas de valeur marchande. Elle considère donc le « prix » du sable par m^3 (c'est-à-dire son intérêt à des fins scientifiques) comme un paramètre variable, mais connu, noté x. Écrivez le PL $\mathcal{P}'$, sous forme canonique, qui consiste à minimiser la perte financière de cette mission spatiale.
4. Sur la feuille quadrillée, représentez graphiquement l'ensemble admissible du PL **relaxé** $\mathcal{P}$ associé à $\mathcal{P}'$. Échelle : 1 cm par instrument de mesure en abscisse, 1 cm par m^3 de sable en ordonnée.
5. Utilisez cette représentation graphique pour déterminer la solution du PL relaxé $\mathcal{P}$, pour les « prix » suivants du m^3 de sable : $x = 0$, $x = 1$ million d'euros, $x = 100$ millions d'euros. Commentez brièvement ces résultats.
6. On souhaite désormais résoudre le PL mixte $\mathcal{P}'$, en fixant le « prix » du sable à $x = 1$ million d'euros par m^3. Tracez sur le graphique l'ensemble admissible de $\mathcal{P}'$, sous la forme de plusieurs segments de droites.
7. Prédisez la solution de $\mathcal{P}'$ en vous appuyant sur le graphique précédent.
8. En vous inspirant de la méthode de séparation/évaluation vue en cours, imaginez un algorithme permettant de résoudre ce PL mixte. Détaillez chaque étape de cet algorithme, en veillant bien sûr à obtenir la même solution que celle trouvée graphiquement.
9. Construisez l'arbre des différents PL relaxés ayant permis de mener à bien cette résolution.

2 Programmation dynamique (5 points)

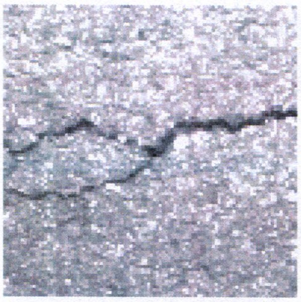

FIGURE 1 – Image de chaussée, de taille 208×208, dans laquelle on cherche à détecter les fissures.

Une image numérique peut être considérée comme une matrice I dont les éléments $I(i,t)$, appelés « niveaux de gris », sont des entiers compris entre 0 et 255 : i est le numéro de ligne, t le numéro de colonne (le « temps »). Cet exercice a pour but d'écrire un programme de détection des fissures dans une image de chaussée (cf. figure 1). L'utilisateur est censé cliquer sur deux pixels $D = (i_D, t_D)$ et $A = (i_A, t_A)$ tels que $t_D < t_A$ (ces points ne sont pas nécessairement situés sur une fissure). Un « chemin » entre D et A est défini comme une séquence de pixels ne comportant pas plus d'un pixel par colonne, et telle que deux pixels consécutifs soient obligatoirement voisins, au sens des huit plus proches voisins. Le programme doit déterminer le chemin entre D et A qui minimise l'objectif suivant :

$$z = \sum_{t=t_D+1}^{t_A-1} I(i_t, t) \tag{1}$$

1. Montrez que le nombre d'inconnues du problème est $N = t_A - 1 - t_D$, et précisez ces inconnues.
2. Montrez que le problème n'est soluble que si $|i_D - i_A| \leq t_A - t_D$. On supposera dorénavant que cette condition est satisfaite.
3. En supposant que les bords supérieur et inférieur de l'image ne sont pas atteints, montrez que le nombre c de chemins partant de D et atteignant la colonne t_A est égal à 3^{N+1}.
4. Écrivez un algorithme de recherche du chemin optimal entre D et A, qui passe en revue les c chemins précédents. Vu les dimensions de l'image de chaussée de la figure 1, N est souvent de l'ordre de 100. Que pensez-vous de cet algorithme, sachant que 3^{101} vaut environ 10^{48} ?
5. Vous allez maintenant rechercher le chemin optimal entre D et A par **programmation dynamique**. Pour l'exemple ci-dessous, où les pixels D et A sont indiqués en rouge, quelles doivent être les dimensions des matrices V et C équivalentes à celles qui ont été utilisées dans le TP3 ?

0	1	0	2	4	2	0	2	0
5	4	3	4	1	1	3	1	**3**
2	1	3	2	0	2	2	3	4
0	0	2	1	4	3	2	2	0
5	4	1	2	1	2	3	4	5

En procédant de la droite vers la gauche, remplissez ces deux matrices en vous restreignant aux cases utiles à la résolution du problème. Terminez la résolution de cet exemple, puis matérialisez le chemin optimal sur le dessin ci-dessus (par exemple en entourant les pixels traversés).