EXAMEN DE STATISTIQUES

Des notes de cours sur une feuille A4 sont autorisées. L'examen comporte quatre exercices indépendants. Il est conseillé de lire tout le sujet et de tenir compte du barème.

1 Statistiques descriptives : exercice (10 points)

Dans le tableau suivant, on liste la relation entre le nombre (mensuel) de commandes d'un commerçant et son chiffre d'affaire mensuel (exprimé en euros) :

Nb de commandes x_i	6402	8355	9126	9610	10055	12087
CA (euros) y_i	250 000	320 000	335 000	350 000	370 000	400 000

1. Sur un graphique soigné, représenter cette série statistique par un nuage de points.
2. Calculer les deux moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ et placer le centre de gravité G du nuage de points sur le graphique.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r du nuage et interpréter sa valeur.
4. Déterminer l'équation de la droite de régression D_r du nuage. Tracer D_r sur le graphique (indiquer les points utilisés pour tracer D_r).
5. Déterminer l'équation de la droite Mayer selon les étapes suivantes : (1) on ordonne les points dans l'ordre croissant des abscisses, (2) on forme deux groupes de points égaux: l'un (resp. l'autre) regroupant les données d'abscisses les plus petites (resp. grandes), (3) Pour chacun des deux groupes, on calcule la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées pour former deux points P1 et P2 du plan, (4) La droite de Mayer passe par les deux points P1 et P2 et on calculera son équation.
6. Donner deux prédictions, grâce aux deux droites (de régression et de Mayer), le chiffre d'affaire espéré si 14568 unités étaient commandées le mois prochain. Les deux prédictions sont-elles cohérentes ?

2 Estimation, exercice (3 points)

On considère un échantillon $(X_1, ...X_n)$ de n variables aléatoires réelles i.i.d tel que chaque X_i suit une loi $\mathcal{L}$ dépendant de deux paramètres α et r. Le premier α est supposé connu. On sait que $\mathcal{L}$ est telle que, $\forall i$, $E[X_i] = \frac{\alpha}{(r-1)}$. Proposer un estimateur de r selon la méthode des moments.

3 Estimation, second exercice (7 points)

On s'intéresse à un phénomène aléatoire dont on sait qu'il suit une loi exponentielle. On considère un échantillon $(X_1, ...X_n)$ de $n = 5$ v.a.r i.i.d tel que X_i suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ où λ est le paramètre à estimer. Le tableau suivant donne 5 réalisations distinctes de l'échantillon.

Pour estimer λ, on utilise l'estimateur issu de la méthode des moments $\widehat{\lambda} = \frac{1}{\widehat{m_1}}$ où $\widehat{m_1}$ est l'estimateur du premier moment non centré c'est-à-dire de $m_1 = E[X_i]$.

1. Donner 5 réalisations de l'estimateur basées sur celles de l'échantillon et représenter ces 5 valeurs sur un graphique adapté.

réalisation 1	0.1369	0.1627	0.0185	0.0278	0.2920
réalisation 2	0.0205	0.1382	0.0536	0.0283	0.0633
réalisation 3	0.1413	0.0484	0.0598	0.0966	0.0250
réalisation 4	0.0073	0.0748	0.0086	0.0566	0.0068
réalisation 5	0.1050	0.1045	0.1252	0.2579	0.2041

2. Donner une valeur numérique approchant l'espérance de l'estimateur $E\left[\widehat{\lambda}\right]$ et représenter cette espérance sur le graphique précédent.

3. Donner une valeur numérique approchant la variance de l'estimateur $Var(\widehat{\lambda})$ et représenter la racine carrée de cette variance, c'est-à-dire un écart-type, sur le graphique précédent.