INP ENSEEIHT

EXAMEN DE STATISTIQUES

Des notes de cours sur une feuille A4 sont autorisées. L'examen comporte quatre exercices indépendants. Il est conseillé de lire tout le sujet et de tenir compte du barème.

1 Statistiques descriptives : premier exercice (6 points)

Voici les temps observés en finale de l'épreuve de 100 mètres des 6 derniers championnats du monde d'athlétisme (2013-2013).

0,1 0,1 0,1 0,1 0,1 0,1 0,1

Temps (secondes)	$]9,5;9,6]$	$]9,6;9,7]$	$]9,7;9,8]$	$]9,8;9,9]$	$]9,9;10]$	$]10;10,1]$	$]10,1;10,2]$	$>10,2$
Effectifs	1	0	2	5	9	13	6	9

1. Quelle est la moyenne des temps observés ? Préciser la formule utilisée.
2. Quelle est l'écart-type des temps observés ? Préciser la formule utilisée.
3. Dans quel intervalle se trouve la médiane ? Proposer une valeur pour la médiane (et la justifier).
4. Sur un graphique soigné, représenter l'histogramme correspondant à cette distribution et placer la médiane en abscisse.

2 Statistiques descriptives : deuxième exercice (7 points)

Dans le tableau suivant, on désigne par x la proportion d'actifs occupés dans le secteur primaire et par y la part du secteur primaire dans le PIB (les valeurs fournies sont des pourcentages) :

État	Allemagne	Belgique	Espagne	France	Grèce	Irlande
Caractère x	3,4	2,7	11,8	6	24,5	15
Caractère y	2	2	5	4	15	10

1. Sur un graphique soigné, représenter cette série statistique par un nuage de points.
2. Calculer les deux moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ et placer le centre de gravité G du nuage de points sur le graphique.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r du nuage.
4. Déterminer l'équation de la droite de régression D du nuage. Tracer D sur le graphique (indiquer les points utilisés pour tracer D).

3 Estimation, troisième exercice (5 points)

On s'intéresse à un phénomène aléatoire gaussien de variance unitaire connue dont on veut connaître la moyenne. On considère un échantillon $(X_1, ...X_n)$ de $n = 5$ v.a.r i.i.d tel que X_i suit une loi $N(\mu, 1)$ où μ est le paramètre à estimer. Le tableau suivant donne 5 réalisations distinctes de l'échantillon.

Pour estimer μ, on utilise l'estimateur $\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Montrer que l'estimateur est non biaisé

réalisation 1	-0.7781	-1.0636	0.5530	-0.4234	0.3616
réalisation 2	1.0393	0.9109	-0.2397	0.1810	0.2442
réalisation 3	0.0964	-0.8305	-0.3523	-0.1748	-0.4807
réalisation 4	0.8368	2.5383	-1.3233	0.1283	-1.4424
réalisation 5	-1.1277	0.0782	2.1066	-0.7158	-0.2805

2. Donner 5 réalisations de l'estimateur basées sur celles de l'échantillon.
3. Donner une valeur numérique approchant l'espérance de l'estimateur $E[\widehat{\mu}]$.
4. Si on sait que la valeur exacte de μ est nulle ($\mu = 0$), donner une valeur numérique illustrant l'absence de biais grâce aux 5 réalisations considérées.
5. Donner une valeur numérique approchant la variance de l'estimateur $Var(\widehat{\mu})$.

4 Estimation, quatrième exercice (2 points)

On considère un échantillon $(X_1, ...X_n)$ de n v.a.r i.i.d tel que chaque X_i suit une loi $\mathcal{L}$ dépendant de deux paramètres α et β. Le second β est supposé connu. On sait que $\mathcal{L}$ est telle que $E\left[X^k\right] = \frac{\alpha\beta^k}{(\alpha-k)}$. Proposer un estimateur de α selon la méthode des moments.