July 31, 2020

Condensé de la 1ère
Mathématiques

Ewen Le Bihan
1eS3

Notations non vues en cours

$:=$	Égal par définition
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$	Appartient à la fois à $\mathbb{A}$ et à $\mathbb{B}$
$\lceil x \rceil$	Arrondir x à l'entier supérieur. ($\lceil 5.1 \rceil = 6$)
1.5	Séparateur ,
$x \cdot y$	Multiplication $\times$
$\vec{v} \perp \vec{u}$	$\vec{v}$ et $\vec{u}$ orthogonaux

Contents

1 Polynômes du second degré $ax^2 + bx + c$ 1
- 1.1 Δ: Trouver les racines 1
- 1.2 Étudier le signe 1
- 1.3 α,β: Trouver l'extremum 1
  - 1.3.1 Maximum ou minimum ? 1
  - 1.3.2 Calcul 1
- 1.4 Différentes formes 1

2 Vecteurs $\vec{v}$, équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ 2
- 2.1 Colinéarité 2
- 2.2 Vecteur directeur 2
  - 2.2.1 Équation réduite $y = mx + p$ 2
  - 2.2.2 Équation cartésienne $ax + by + c = 0$ 2
- 2.3 Décomposer un vecteur 2
- 2.4 Relation de Chasles 2

3 Statistiques 3
- 3.1 Caractéristiques 3
- 3.2 Transformation de valeurs selon $y = mx + p$ 3
  - 3.2.1 Démonstrations 3

4 Probabilités 4
- 4.1 Notions 4
- 4.2 Loi de probabilité de X 4
- 4.3 Caractéristiques 4
- 4.4 Issues, évennements 4
- 4.5 Loi binomiale $\mathscr{B}$ 5
  - 4.5.1 Définitions 5
  - 4.5.2 Loi de X 5
  - 4.5.3 Caractéristiques 5

5 Suites U_n 6
- 5.1 Types de suites 6
  - 5.1.1 Fonctionnelle 6
  - 5.1.2 Récursive 6
- 5.2 Suites remarquables 6
  - 5.2.1 Arithmétiques 6
  - 5.2.2 Géométriques 6
- 5.3 Sommes 6
  - 5.3.1 Suites arithmétiques 6
  - 5.3.2 Suites géométriques 6
- 5.4 Variations 6
  - 5.4.1 Fonction associée 6
  - 5.4.2 Méthode 2 6
  - 5.4.3 Méthode 3 6

6 Produit Scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 7
- 6.1 Calcul 7
- 6.2 Multiplication de segments liés 7
- 6.3 Identités remarquables 7
- 6.4 Angle aigu et obtu 7

7 Étude de fonctions 8
- 7.1 Fonctions de bases 8
  - 7.1.1 Démonstration: $\sqrt{}$ est croissante sur sont intervalle de définition 8
- 7.2 Opérations sur fonctions 8
- 7.3 Dérivées 9
  - 7.3.1 Nombre dérivé $f'(a)$ 9
  - 7.3.2 Tangeante T au point a 9

7.3.3 Dérivées remarquables . . . 9
7.3.4 Opérations sur les dérivées . . . 9
7.3.5 Utilisations de $f'(x)$ . . . 9
7.4 Positions relatives . . . 9
7.4.1 Justifier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions identité, carré et racine carrée . . . 10

8 Trigonométrie **11**
8.1 Notions . . . 11
8.2 Valeurs remarquables . . . 11
8.3 Formules de trigonométrie . . . 11
8.3.1 Démonstration . . . 11

9 Géométrie **13**
9.1 Médiane . . . 13
9.2 Centre de gravité d'un triangle . . . 13
9.3 Théorèmé de la médiane . . . 13
9.4 Équation de cercle . . . 13

1 Polynômes du second degré $ax^2 + bx + c$

1.1 Δ: Trouver les racines

$$\Delta := b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{4a} \\ \Delta = 0 & x_0 = \frac{b}{2a} \\ \Delta < 0 & \emptyset \end{cases}$$

1.2 Étudier le signe

Le signe du polynôme est celui de a, et, si $\Delta > 0$, est celui de $-a$ entre x_1 et x_2

1.3 α,β: Trouver l'extremum

1.3.1 Maximum ou minimum ?

$a > 0$	minimum
$a < 0$	maximum

1.3.2 Calcul

$$\alpha := \frac{b}{2a}$$
$$\beta := \frac{\Delta}{4a}$$
$$\text{Sommet} = (\alpha; \beta)$$

Le polynôme atteint un extremum en α de valeur β

1.4 Différentes formes

Canonique	$(x - \alpha)^2 + \beta$
Factorisée	$a(x - x_1)(x + x_2)$
	$a(x_0 - x)^2$
Développée	$ax^2 + bx + c$

2 Vecteurs $\vec{v}$, équations cartésiennes $ax + by + c = 0$

2.1 Colinéarité

$$\begin{aligned}
\vec{v}\ \&\ \vec{u} \text{ colinéaires} &\iff x_u y_v - y_u x_v = 0 \\
&\iff (u) \parallel (v) \\
&\iff \vec{u} = \lambda \vec{v} \quad (\forall\, \lambda \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

2.2 Vecteur directeur

2.2.1 Équation réduite $y = mx + p$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

2.2.2 Équation cartésienne $ax + by + c = 0$

Vecteur directeur $(-b; a)$

Coefficient directeur $m = -\frac{a}{b}$

Vecteur normal $(a; b)$

2.3 Décomposer un vecteur

$$(\forall\, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}) \quad \vec{w} = \lambda \vec{v} + \lambda' \vec{u}$$

2.4 Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

3 Statistiques

3.1 Caractéristiques

Nom	Type	Définition	
Effectif total	/	$N :=$	$\sum_{i=0}^{p} n_i$
Moyenne	Centrale	$\bar{x} :=$	$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{p} n_i x_i$
Médiane	Centrale	$Me :=$	$\begin{cases} N \text{ pair} & \frac{1}{2}\left(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N+1}{2}}\right) \\ N \text{ impair} & x_{\lceil \frac{N}{2} \rceil} \end{cases}$
Mode	Centrale	$Mo :=$	Valeur ou classe qui a l'effectif le plus grand
Premier Quartil	Non-centrale	$Q_1 :=$	$x_{\lceil \frac{N}{4} \rceil}$
Troisième Quartil	Non-centrale	$Q_3 :=$	$x_{\lceil \frac{3}{4}N \rceil}$
Étendue	Dispersion	$e :=$	$x_{max} - x_{min}$
Écart inter-quartil	Dispersion		$Q_3 - Q_1$
Variance	Dispersion	$V :=$	$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{p}(n_i x_i^2) - \bar{x}$
Écart type	Dispersion	$\sigma :=$	$\sqrt{V}$

3.2 Transformation de valeurs selon $y = mx + p$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= m\bar{x} + p \\ V_y &= m^2 V_x \\ \sigma_y &= |m|\sigma_x \end{aligned}$$

3.2.1 Démonstrations

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{p} n_i m x_i + p \\ &= m\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{p}(n_i x_i) + p \\ &= m\overline{x} + p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{V_y} \\ &= \sqrt{m^2 V_x} \\ &= \sqrt{m^2}\sqrt{V_y} \\ &= |m|\sigma_x \end{aligned}$$

4 Probabilités

4.1 Notions

Nom	Symbole	Description
Univers	Ω	Ensemble des issues possibles
Variable aléatoire	X	Fonction qui renvoie un nombre aléatoire dans Ω

4.2 Loi de probabilité de X

Exemple:

- $\Omega = \{0; 1; 2\}$
- $p(X = 0) = p(X = 2) = \frac{1}{4}$
- $p(X = 1) = \frac{1}{2}$

k	0	1	2
$p(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4.3 Caractéristiques

Nom	Description	Formule
Espérance	Résultat moyen espéré	$E(X) := \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
Variance		$V(X) := \sum_{i=1}^{n} (p_i x_i) - E(X)^2$
Écart type		$\sigma(X) := \sqrt{V(X)}$

4.4 Issues, évennements

Exemple:

x_i	A	B
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Calcul de l'issue AB ($A \to B$):

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

Calcul de l'évenement Θ « au moins une fois A »:

$$p(\Theta) = p(AB) + p(BA) + p(AA)$$

Calcul de l'évennement contraire $\bar{\Theta}$:

$$p(\bar{\Theta}) = 1 - p(\Theta)$$

4.5 Loi binomiale $\mathscr{B}$

4.5.1 Définitions

Épreuve de Bernoulli	
Évenement « succès »	S
Évenement « échec »	$\bar{S}$
Probabilité de succès	$p := p(S)$
Probabilité d'échec	$q := p(\bar{S})$
	$= 1 - p$

Schéma de Bernoulli	$\mathscr{B}(n;p)$
Nombre de répétitions	n
Nombre de succès	k
Univers	$\Omega = [0;n] \cap \mathbb{N}$

4.5.2 Loi de X

Si $X \sim \mathscr{B}(n;p)$

k	0	2	3	...	n
$p(X = k)$	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$	$\ldots$	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$

4.5.3 Caractéristiques

$$\forall k \in [0;n] \cap \mathbb{N}$$

$$E(X) = np$$
$$V(X) = npq$$

5 Suites U_n

5.1 Types de suites

5.1.1 Fonctionnelle

$$U_n = 2n$$

5.1.2 Récursive

$$\begin{cases} U_{n+1} & = U_0 + U_n \\ U_0 & = 5 \end{cases}$$

5.2 Suites remarquables

5.2.1 Arithmétiques

$$\begin{cases} U_{n+1} & = U_n + r \\ U_0 & = k \end{cases}$$

$$U_n = U_0 + r \cdot n$$

5.2.2 Géométriques

$$\begin{cases} U_{n+1} & = U_n \cdot q \\ U_0 & = k \end{cases}$$

$$U_n = U_0 \cdot q^n$$

5.3 Sommes

5.3.1 Suites arithmétiques

$$\sum_{\mu=i}^{j} U_\mu = \frac{U_i + U_j}{2} \cdot (j - i + 1)$$

5.3.2 Suites géométriques

$$\sum_{\mu=i}^{j} U_\mu = U_i \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q}$$

5.4 Variations

5.4.1 Fonction associée

$$(\forall n \in \mathbb{N}) f : n \mapsto U_n$$
$$\text{Si } f \nearrow / \searrow \implies U_n \nearrow / \searrow$$

5.4.2 Méthode 2

$$U_{n+1} - U_n \lesseqgtr 0 \iff U_n \searrow / \nearrow$$

5.4.3 Méthode 3

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \gtreqless 1 \iff U_n \nearrow / \searrow$$

6 Produit Scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Note: pour éviter les confusions, la multiplication normale est notée $\times$ dans ce chapitre.

6.1 Calcul

$$\vec{\mu}, \vec{\kappa} \text{ projetés orthogonaux de } \vec{u} \text{ et } \vec{v}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\
&= x_u \times x_v + y_u \times y_v \ * \\
&= \vec{u} \perp \vec{v} \\
&= \vec{\mu} \cdot \vec{\kappa} \\
&= \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{v} - \vec{u}||^2\right) \ **
\end{aligned}$$

* Seulement dans un repère orthonormé
** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont vecteurs directeurs des segments formant un triangle:

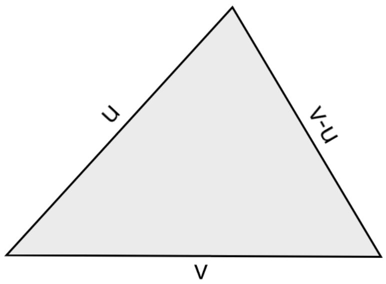

Figure 1

6.2 Multiplication de segments liés

Si A, H, B alignés dans cet ordre

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

Sinon, si H, A, B alignés dans cet ordre

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

6.3 Identités remarquables

$$\begin{aligned}
||\vec{u} \pm \vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 \pm 2\vec{v} \cdot \vec{u} + ||\vec{v}||^2 \\
(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) &= ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2
\end{aligned}$$

6.4 Angle aigu et obtu

$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \iff (\vec{u}; \vec{v}) \text{ aigu}$$

Et inversement

7 Étude de fonctions

7.1 Fonctions de bases

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$\nearrow$	0	$\nearrow$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$
$1/x$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$
$\sqrt{x}$	$/////$	0	$\nearrow$
$\|x\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$

7.1.1 Démonstration: $\sqrt{}$ est croissante sur sont intervalle de définition

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a < b$.

$$\begin{aligned}\sqrt{a} - \sqrt{b} &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\end{aligned}$$

Or $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs ou nuls, donc, comme $a < b \implies a \neq b$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est strictement positif.
De plus, $a < b \iff a - b < 0$, donc $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.
Finalement:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

L'ordre est conservé, $\sqrt{}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

7.2 Opérations sur fonctions

$\leftrightarrows$: Changement de variation
$\rightrightarrows$: Même variation

$$\forall\, k \in \mathbb{R},\ \forall\, \lambda_+ \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, \lambda_- \in \mathbb{R}^-$$

u	$-\infty$	0	$+\infty$
$u + k$	$\rightrightarrows$	k	$\rightrightarrows$
$u \cdot \lambda_+$	$\rightrightarrows$	0	$\rightrightarrows$
$u \cdot \lambda_-$	$\leftrightarrows$	0	$\leftrightarrows$
$\sqrt{u}$	$/////$	0	$\nearrow$
$1/u$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

7.3 Dérivées

7.3.1 Nombre dérivé $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

7.3.2 Tangeante T au point a

$$T : y = \underbrace{f'(a)}_{\text{coef dir}} (x - a) + f(a)$$

7.3.3 Dérivées remarquables

	$f(x)$	$f'(x)$
	constante	0
$\forall\, n \in \mathbb{N}$	x^n	nx^{n-1}
	$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$
	${}^1/_x$	$-1/x^2$

7.3.4 Opérations sur les dérivées

$(u + v)'$ et $(ku)'$ fonctionne normalement.

$$(uv)' = u'v + v'u$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{v'u - u'v}{v^2}$$

7.3.5 Utilisations de $f'(x)$

Sens de variation de f

Si f dérivable sur $[I; J]$

x	I	J
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Extrema (*et pas «extremums» bordel de merde*)

Trouver le(s) x pour $f'(x) = 0$

7.4 Positions relatives

Soit f et g deux fonctions avec pour coubres représentatives C_f et C_g

1. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans $D_f \cap D_g$
2. $\begin{cases} f(x) - g(x) > 0 & C_f \text{ est au dessus de } C_g \text{ à } x \\ f(x) - g(x) > 0 & C_f \text{ est au dessous de } C_g \text{ à } x \\ f(x) - g(x) = 0 & C_f \text{ et } C_g \text{ sont confondues en } x \end{cases}$

7.4.1 Justifier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions identité, carré et racine carrée

Soit, pour toute fonction f, C_f sa courbe représentative. Soit, pour x dans $D_i = \mathbb{R}$, $i = x \mapsto x$, pour tout x dans $D_c = \mathbb{R}$, $c = x \mapsto x^2$ et, pour tout x dans $D_r = \mathbb{R}_+$, $r = x \mapsto \sqrt{x}$.

Soit $x \in C_i \cup C_c \cup C_r = \mathbb{R}_+$
Etudions d'abord la position relative de C_i et C_c. On étudie le signe de $i(x) - c(x)$.

$$\begin{aligned} i(x) - c(x) &= x - x^2 \\ &= x(1 - x) \end{aligned}$$

Or $x > 0$ et $1 - x$ est strictement positif pour $x > 1$. Pour $x = 1$, $x(1 - x) = 0$ et, pour $x < 1$, $x(1 - x) < 0$. On en conclu que, pour $x < 1$, C_i est au dessus de C_c, puis que les courbes ont un point d'intersection à $x = 1$, puis que C_i est en dessous de C_c pour $x > 1$.

Etudions ensuite la position relative de C_i et de C_r: on étudie le signe de $i(x) - r(x)$.

$$\begin{aligned} i(x) - r(x) &= x - \sqrt{x} \\ &= x - x^{0.5} \\ &= x(1 - x^{-0.5}) \\ &= x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

x	0		1		$+\infty$
x	0	$+$	0	$+$	
$1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$i(x) - r(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

8 Trigonométrie

8.1 Notions

Radians unité d'angle, 1 radian équivaut à 180 degrés

Mesure principale mesure dans $[0; 2\pi[$ d'un angle. Par ex. la mesure principale de 4π est 0.

Cercle trigonométrique cercle de rayon 1 ($2\pi r \to 2\pi$)

Angle orienté les angles ont un signe selon le sens avec lequel ils sont mesurés

8.2 Valeurs remarquables

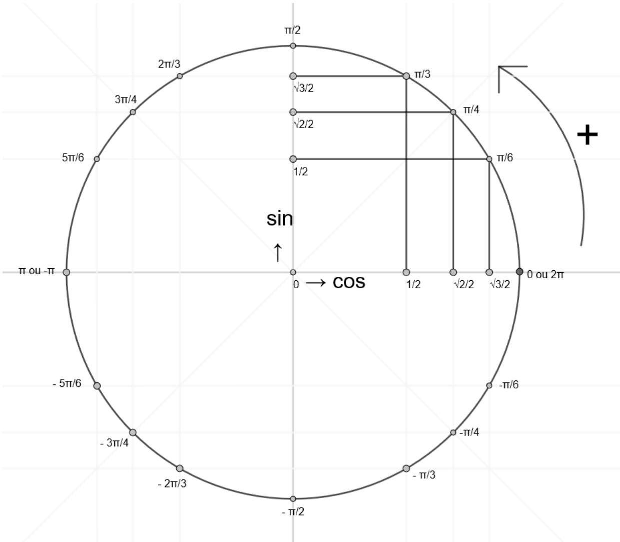

Figure 2

8.3 Formules de trigonométrie

$$\begin{aligned}
\cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\
\sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\
\tan(a \pm b) &= \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \\
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\
&= 2\cos^2 a - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 a \\
\sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\
\cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2} \\
\sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2}
\end{aligned}$$

8.3.1 Démonstration

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé.

On note A le point tel que $OA = 1$ et tel que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$.

On note B le point tel que $OB = 1$ et tel que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = a + b$.

On note A' le point tel que $OA' = 1$ et tel que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OA'}) = a + \frac{\pi}{2}$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= \cos a\vec{\imath} + \sin a\vec{\jmath} \\
\overrightarrow{OB} &= \cos(a+b)\vec{\imath} + \sin(a+b)\vec{\jmath} \\
\overrightarrow{OA'} &= \cos(a+\frac{\pi}{2})\vec{\imath} + \sin(a+\frac{\pi}{2})\vec{\jmath} \\
&= -\sin a\vec{\imath} + \cos a\vec{\jmath}
\end{aligned}$$

Or, dans $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$:

$$\overrightarrow{OB} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OA'}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OB} &= \cos a\cos b\vec{\imath} + \sin a\cos b\vec{\jmath} - \sin a\sin b\vec{\imath} + \cos a\sin b\vec{\jmath} \\
&= (\cos a\cos b - \sin a\sin b)\vec{\imath} + (\sin a\cos b + \cos a\sin b)\vec{\jmath}
\end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a:

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b
\end{aligned}$$

9 Géométrie

9.1 Médiane

Médiane issue d'un sommet $A \iff$ Droite passant par A et par le milieu du côté opposé à A

9.2 Centre de gravité d'un triangle

Centre de gravité de $ABC \iff$ Unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

9.3 Théorèmé de la médiane

- Les médianes d'un triangle se coupent au centre de gravité
- Soit G le centre de gravité de ΔABC et $M \in A, B, C$. Pour chaque médiane du triangle issue du sommet M $[MM']$, $\overrightarrow{M'G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{M'M}$

9.4 Équation de cercle

Soit (x_0, y_0) le centre du cercle et r sont rayon.

$$r^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2$$

Si l'on connait un point A sur le cercle ainsi que son centre O, il faut trouver r:

$$\begin{aligned} r &= \text{distance}(A, O) \\ &= \sqrt{(A_x - O_x)^2 + (A_y - O_y)^2} \end{aligned}$$