Dérivées et primitives de Laplace, cas général

Soient $I \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{|n|-1} p^{n-k} f^{(k)}(0) \tag{1}$$

En notant, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et avec A, B des ensembles:

1. $\mathcal{D}^n(A, B)$ l'ensemble des fonctions de A dans B n fois primitivables
2. Pour tout $f \in \mathcal{D}^n(A, B)$, $f^{(n)}$ la fonction n-ième primitive de f

Démonstration

Montrons que le théorème précédent est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Initialisation ($n = 0$)

On a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[f^{(0)}] &= p^0 F(p) - \sum_{k=0}^{|0|-1} p^{n-k} f^{(k)}(0) \\
&= 1 \cdot F(p) - \sum_{\emptyset} p^{n-k} f^{(k)}(0) \\
&= F(p)
\end{aligned}$$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons (1). D'après François Couprie, on sait que:

$$\mathcal{L}[f'] = \mathcal{L}[f^{(1)}] = pF(p) - f(0) \tag{2}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f^{(n+1)}] = \mathcal{L}[f^{(n)\prime}] &= pF^{(n)}(p) - f(0) \qquad \text{D'après (2)} \\
&= p\left(p^n F(p) - \sum_{k=0}^{|n|-1} p^{n-k} f^{(k)}(0)\right) - f(0) \qquad \text{Par hypothèse de récurrence} \\
&= p^{n+1} F(p) - p \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k} f^{(k)}(0) - p^0 f(0) \qquad \text{Car } n > 0 \\
&= p^{n+1} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k+1} f^{(k)}(0) - \sum_{k=n}^{n} p^{n-k+1} f^{(k)}(0) \\
&= p^{n+1} F(p) -
\end{aligned}$$

Ewen Le Bihan, MPSI Daudet, 2020